ALGÈBRE INVOLUTIVE (A3)
(13 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) On appelle **involution** dans une **C-algèbre** E toute **application bijective** (bijection) notée i : E $\mapsto$ E vérifiant :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &i\,(i\,(x)) = x, \\ &i\,(x + y) = i\,(x) + i\,(y), \\ &i\,(\alpha\, x) = \bar{\alpha}\,.\,i\,(x), \\ &i\,(x\,.\,y) = i\,(x)\,.\,i\,(y). \end{aligned} \qquad \forall\,(x, y, \alpha) \in E^2 \times \mathbf{C},$$

(ii) Par suite :

(a) l'image x* = i (x) de x est appelée (élément) **adjoint** de x ;

(b) x $\in$ E est appelé **élément auto-adjoint**, ou **élément hermitien**, ssi i (x) = x ;

(c) V $\subset$ E est appelée **partie auto-adjointe** (dans E) ssi V est (globalement) stable pour l'involution i (ie i (V) = V).

(iii) On appelle :

(a) **algèbre involutive** toute algèbre E munie d'une involution ;

(b) **algèbre normée** (E, ||.||) une algèbre E dotée d'une **norme** ||.||, et **algèbre normée involutive** toute algèbre normée (E, ||.||) munie d'une involution i tq :

$$(2) \qquad \|i\,(x)\| = \|x\|, \qquad \forall\, x \in E\ ;$$

(c) **algèbre stellaire** une algèbre de BANACH (cf **espace de BANACH**) munie d'une involution i tq :

$$(3) \qquad \|x\|^2 = \|i\,(x)\,.\,x\|, \quad \forall\, x \in E.$$

(iv) On établit les propriétés élémentaires suivantes :

(a) si e est l'**élément unité** d'une algèbre involutive E, on a, $\forall$ x $\in$ E :

$$(4) \qquad x\,.\,i\,(e) = i\,(e\,.\,i\,(x)) = i\,(i\,(x)) = x \qquad (\text{resp } i\,(e)\,.\,x = x),$$

d'où i (e) = e ;

(b) si x est inversible et d'inverse x^{-1} dans une algèbre involutive E, on a :

$$(5) \qquad i\,(x^{-1}) = (i\,(x))^{-1}\ ;$$

(c) une algèbre stellaire vérifie (2) ;

(d) quel que soit $x \in E$, $(x + i(x)) / 2$ et $(x - i(x)) / 2$ sont des éléments auto-adjoints de E.

(iv) Enfin, on dit que :

(a) un élément x d'une algèbre involutive E est un **élément normal** de E ssi :

(6) $x \,.\, i(x) = i(x) \,.\, x$;

(b) un élément x d'une algèbre unitaire E, d'élément unité e, est un **élément unitaire** de E ssi :

(7) $x \,.\, i(x) = i(x) \,.\, x = e$.