

ANALYSE DES COVARIANCES PARTIELLES (K5)

(03 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

L'**analyse des covariances partielles** est une méthode d'**analyse des données** destinée à étudier les **covariances** entre des variables qui tiennent compte de l'**influence** éventuelle (généralement supposée linéaire) exercée par d'autres variables sur celle retenue. L'analyse est présentée dans un contexte « empirique ».

(i) Soit $T = [t_1, \dots, t_k]$ une **matrice** constituée de vecteurs colonnes $t_k \in \mathbf{R}^N$, centrée selon $X = P T$, et $S = [s_1, \dots, s_L]$ une matrice de vecteurs $s_l \in \mathbf{R}^N$, centrée selon $Z = P S$, où $P = I_N - (e_N e_N')^{-1} e_N e_N'$ désigne la **matrice de centrage par rapport à la moyenne**.

On suppose que Z exerce une influence linéaire sur X , qui peut s'écrire (à une (N, K) -matrice de **perturbations** U additive près) sous la forme d'un **modèle de régression multidimensionnel** :

$$(1) \quad X = Z A' + U, \quad \text{avec } E U = 0,$$

dans lequel on suppose que seules X et Z sont **observables**.

La **matrice des covariances** partielles, définie par :

$$(2) \quad V_{X/Z} = N^{-1} \cdot U' U,$$

est estimée selon :

$$(3) \quad V_{X/Z}^{\wedge} = N^{-1} \cdot U^{\wedge}{}' U^{\wedge},$$

où $U^{\wedge} = X - Z A^{\wedge}{}'$ et $A^{\wedge} = (Z' Z)^{-1} Z' X$ est l'**estimateur des moindres carrés ordinaires** de A dans (1).

On a donc la relation :

$$(4) \quad V_{X/Z}^{\wedge} = N^{-1} \cdot [X' X - X' Z (Z' Z)^{-1} Z' X] = V_{XX} - V_{XZ} V_{ZZ}^{-1} V_{XZ}' ,$$

en notant les **matrice des covariances** empiriques selon :

$$V_{XX} = N^{-1} X' X, \quad V_{XZ} = N^{-1} X' Z, \quad V_{ZZ} = N^{-1} Z' Z.$$

Ainsi, après avoir tenu compte de l'effet $Z A^{\wedge}{}'$ exercé par Z , l'analyse du tableau X se ramène à l'**analyse des données** (eg **analyse en composantes principales**) sur les **résidus** U^{\wedge} , donc à la diagonalisation de $V_{U^{\wedge}} = N^{-1} U^{\wedge}{}' U^{\wedge} = V_{X/Z}^{\wedge}$.

(ii) On appelle **analyse des corrélations partielles** une analyse, analogue à la précédente, mais appliquée à la matrice des corrélations partielles (au lieu de celle des covariances partielles).