ANGLE (A13, C11)
(22 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion d'**angle** est un notion géométrique classique qui aide à interpréter des propriétés relatives à divers modèles ou méthodes : **modèle de régression**, méthodes d'analyse des données (**analyse en composantes**, **analyse factorielle**) (cf **coefficient de détermination**). Elle intervient aussi dans la définition de certaines **lois de probabilité** (cf **loi directionnelle**, **loi de FISHER-MISES**).

(i) On appelle **angle** des vecteurs $x \in \mathbf{R}^n$ et $y \in \mathbf{R}^n$ tout nombre $\theta \in \mathbf{R}$ tq :

(1) $\cos\theta = x'\, y \,/\, (||x|| \,.\, ||y||)$,

$||.||$ étant la **norme** euclidienne usuelle (cf **espace euclidien**).

D'après l'**inégalité de CAUCHY-SCHWARZ** :

(2) $-1 \leq r = \cos\theta \leq +1$.

Comme $\cos\theta = \cos(\theta + k \,.\, 2\pi)$, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$, on restreint généralement la fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ au segment $[0, \pi]$ sur lequel elle est inversible, d'**inverse** (ou détermination principale) $r \mapsto \mathrm{Arc}\cos r$.

Par suite, on appelle **angle** des vecteurs x et y le nombre (unique) $\theta \in [0, \pi]$ tq :

(3) $\theta = \mathrm{Arc}\cos \{x'\, y \,/\, (||x|| \,.\, ||y||)\}$.

(ii) La notion d'**angle** s'étend à tout couple d'éléments d'un **espace de HILBERT** $(E, (.\,|\,.))$:

(4) $\theta = \mathrm{Arc}\cos \{(x \,|\, y) \,/\, ((x \,|\, x)^{1/2}\, (y \,|\, y)^{1/2})\}$.

Ainsi, si E est un espace euclidien réel, dont la **métrique** est définie par une **matrice définie positive** Q, l'**inégalité de K.H.A. SCHWARZ** s'écrit :

(5) $-1 \leq x'\, Q\, y \,/\, (||x||_Q \,.\, ||y||_Q) \leq +1, \qquad \forall\, (x, y) \in E^2$,

où $||u||_Q = u'\, Q\, u$.

On définit alors un **angle** (au sens de la métrique Q) comme le nombre θ tq :

(6) $\cos\theta = x'\, Q\, y \,/\, (||x||_Q \,.\, ||y||_Q) = (x \,/\, ||x||_Q)'\, Q\, (y \,/\, ||y||_Q)$.