APPLICATION (A3)
(10 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit E et F deux **ensembles** quelconques, $G \subset E \times F$ et f = (G, E, F) une **correspondance** entre E et F.

On dit que f est une **application** de E vers F ssi :

(1) $\forall x \in E, \exists y \in F$ (y unique) tq $(x, y) \in G$.

Autrement dit, à tout élément de E la correspondance f associe (exactement) un élément de F. Par suite :

(a) tout $y \in F$ est l'image par f soit d'un élément $x \in E$, soit d'aucun ;

(b) $x' \in E$ et $x'' \in E$ peuvent avoir même image f (x') = f (x'') par f.

(ii) Si l'on note Γ_x la coupe de G en x, $\forall x \in E$, alors f est une application ssi Card $\Gamma_x = 1$, $\forall x \in E$. Dans ce cas, le **graphe** G de f est appelé **graphe fonctionnel** et on le note souvent G_f . Au lieu de f = (G, E, F), on note plutôt :

(2) $f : E \mapsto F$, ou encore $f : x \mapsto f(x)$, etc,

l'opération qui, à tout $x \in E$ associe un $y = f(x) \in F$ unique. Une application est donc, par définition, partout définie dans E. L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathcal{A}(E, F)$ ou F^E.

Une application est toujours définie par la donnée du triplet (E, F, f) dans lequel f est un mode opératoire permettant d'associer E et F.

Si F est un espace numérique élémentaire (**N**, **Z**, **D**, **Q**, **R** ou **C**) ou l'une de ses puissances (ie $\mathbf{N}^n$, $\mathbf{Z}^n$, $\mathbf{D}^n$, $\mathbf{Q}^n$, $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$), f est généralement appelée **fonction numérique**.

(iii) Une application est parfois appelée **transformation** (notamment dans les questions de géométrie ou d'analyse fonctionnelle), voire, plus rarement, **correspondance** ou **association**.

(iv) On observe souvent l'expression *« la fonction f (x) »* au lieu de *« la fonction f »*. C'est confondre un point $f(x) \in F$ avec un « point » $f \in \mathcal{A}(E, F)$.

Cet abus de language se trouve en **Statistique** dans l'expression *« la variable (aléatoire) x = X (ω) »* au lieu de l'expression correcte *« la variable (aléatoire) X »* : c'est confondre l'image $x = X(\omega) \in \mathcal{X}$ (**espace d'observation**) d'un point $\omega \in \Omega$ (**espace fondamental**) avec l'application $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$-mesurable $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.

(v) Soit E, F et G des ensembles quelconques et $f : E \times F \mapsto G$ une application.

Etant donné $y \in F$, on appelle **première application partielle** de f au point y l'application $p : E \mapsto G$ définie selon :

(3) $x \in E \mapsto f(x, y) \in G$.

De même, étant donné $x \in E$, on appelle **seconde application partielle** de f au point x l'application $q : F \mapsto G$ définie selon :

(4) $y \in F \mapsto f(x, y) \in G$.

Ces applications sont souvent notées resp f_y et f_x .

(vi) La notion d'application partielle s'étend aisément à plus de deux facteurs. Si $(Ei)_{i=1,\ldots,n}$ est une suite d'ensembles quelconques et $f : \Pi_{i=1}^{n} E_i \mapsto F$ une application de $E = \Pi_{i=1}^{n} E_i$ dans un ensemble quelconque F, la **i-ième application partielle** f_i est définie ($\forall\, i \in N_n^*$) selon :

(5) $x_i \in E_i \mapsto f(x) \in F$.