

## APPLICATION CONCAVE (A4, A11, G)

(17 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit  $E$  un **espace vectoriel topologique** (eg  $E = \mathbf{R}^n$ ) et  $(F, \leq)$  un **ensemble totalement ordonné** de  $E$  (cf **relation d'ordre**).

On dit que  $f : E \mapsto F$  est une **application convexe** au point  $a \in E$  ssi son **épigraphe** est une **partie convexe** de  $E \times F$ , ie :

(1)  $\text{Epi}(f) = \{(x, f(x)) : x \in E \text{ et } f(x) \geq f(a)\}$  est convexe dans  $E \times F$ .

On dit que  $f$  est convexe (ou convexe sur  $E$ ) ssi (1) est vérifiée en tout point  $a \in E$ .

On définit une **application strictement convexe** au point  $a \in E$  comme une application tq :

(2)  $\text{Epi}(f) = \{(x, f(x)) : x \in E \text{ et } f(x) > f(a), \forall x \neq a\}$  est convexe dans  $E \times F$ .

Cette application est strictement convexe (sur  $E$ ) si (2) est vérifiée en tout point  $a \in E$ .

(ii) On définit, de façon parallèle, la notion de **concavité** et de **concavité stricte** d'une application.

(iii) La propriété de concavité est souvent associée à l'étude des **fonctions d'utilité** (eg **utilité du statisticien**) ou à des considérations d'**optimisation** (maximisation).