APPLICATION LINÉAIRE (A3)
(03 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

L'expression **application linéaire** désigne un **homomorphisme**.

(i) Soit E et F deux **espaces vectoriels** sur un corps commutatif **K** (eg **K** = **R** ou **K** = **C**) et f : E $\mapsto$ F une **application** donnée.

On dit que f est une **application linéaire** de E dans F, ou un **homomorphisme** entre E et F, ssi :

(1) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2, \forall (x, y) \in E^2.$

L'ensemble des **applications linéaires** de E dans F se note Hom (E, F) ou parfois $\mathscr{L}$(E, F) (notation distincte de celle des applications linéaires continues (cf infra)).

(ii) Si E et F sont de dimensions finies (dim E = n et dim F = m) et munis de bases, on peut représenter f à l'aide d'une (m,n)-**matrice** M, avec M $\in M_{mn}$ (**K**), espace vectoriel des matrices sur K de « **format** » (m,n).

(iii) Si E et F sont des **espaces normés** sur **K** = **R** (ou **C**), on dit que f $\in$ Hom (E, F) est une **application linéaire continue**, ou un **homorphisme continu**, ssi elle est continue en tant qu'**application** de l'**espace métrique** E dans l'espace métrique F.

On montre qu'une application linéaire est continue ssi elle est bornée, ie ssi il existe a > 0 tq :

(2) $\|f(x)\| \leq a \,.\, \|x\|, \quad \forall x \in E.$

L'ensemble des application linéaire continues est noté $\mathscr{L}$(E, F).

(iv) Si L $\lhd$ E est un sous-espace vectoriel de E, on établit les propriétés suivantes :

(a) dim f (L) $\leq$ dim L ;

(b) f (L) $\lhd$ F ;

(c) M $\lhd$ F $\Rightarrow f^{-1}$ (M) $\lhd$ E ;

(d) dim E = n $\Rightarrow$ dim (Ker f) + dim (Im F) = dim E = n, $\forall$ f $\in$ Hom (E, F) ;

(e) si f $\in$ Hom (E, F) et si L $\lhd$ E, alors :

(3) $E = L \oplus \text{Ker } f \Rightarrow f_{/L} \in \text{Isom}(L, \text{Im } f)$ (cf **isométrie**) ;

(f) si dim E = n, alors {f $\in$ Mono (E, F)} $\Leftrightarrow$ {rg f = n} ;

(g) si dim F = m, alors $\{f \in \text{Epi}(E, F)\} \Leftrightarrow \{\text{rg } f = m\}$;

(h) si dim E = n et dim F = m, alors $\{f \in \text{Isom}(E, F)\} \Leftrightarrow \{\text{rg } f = n = m\}$;

(i) $\{f \in \text{Epi}(E, F)\} \Rightarrow \text{Im } f = F$;

(j) $\{f \in \text{Mono}(E, F)\} \Rightarrow \text{Ker } f = \{0\}$.

Dans ce qui précède, Hom (resp Isom, Mono, Epi) désigne un ensemble d'homomorphismes (resp d'isomorphismes, de monomorphismes, d'épimorphismes).