APPLICATION MESURABLE (A5, B1, B4, C4)
(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **mesurabilité** est à une **application mesurable** (entre **espaces mesurables**) ce qu'est la notion de **continuité** pour une **application continue** (entre **espaces topologiques**). Elle est essentielle pour « transporter » une mesure ou une probabilité d'un espace mesurable à un autre (cf **mesure image**, **loi de probabilité**).

(i) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ deux **espaces mesurables**.

On appelle **application mesurable**, définie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et à valeurs dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$, toute **application** $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ tq :

(1) $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}, \qquad \forall\ C \in \mathcal{C}.$

Cette propriété de définition se note aussi : $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$.

On précise parfois que f est $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-mesurable. Lorsque la **tribu** $\mathcal{C}$ est connue (ou implicite), on dit simplement que f est $\mathcal{B}$-mesurable : ceci est notamment le cas lorsque $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^G$ et que $\mathcal{C}$ en est la **tribu borélienne**. Il en va de même pour $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$. Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résulte, on dit simplement que f est mesurable.

Lorsque f est une **fonction numérique**, on parle aussi de **fonction mesurable**.

(ii) Deux types d'applications mesurables jouent un rôle fondamendal :

(a) celui de **variable aléatoire** en **calcul des probabilités** ;

(b) celui de **statistique** en **Statistique**.

(iii) Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ et $(\mathcal{Z}, \mathcal{D})$ des espaces mesurables. Si $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ est une application $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-mesurable et $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$ une application $(\mathcal{C},\mathcal{D})$-mesurable, alors l'application produit $g \circ f$ est une application $(\mathcal{B},\mathcal{D})$-mesurable.

(iv) On montre que toute fonction mesurable $f : \mathcal{X} \mapsto \overline{\mathbf{R}}_+$ est limite simple d'une suite croissante de **fonctions étagées** $f_n : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}_+$ sur $\mathcal{B}$ (**tribu de parties** de $\mathcal{X}$) (cf **convergence simple**).

En effet, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ n'est autre que la suite des **approximations dyadiques tronquées** (**de H.L. LEBESGUE**) de f, définie par :

(1) $f_n = \sum_{z \in \mathbf{Z}} (2^{-n} . z) . \mathbf{1}(B_{nz}), \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}^*,$

avec $B_{nz} = \{x \in \mathcal{X} : 2^{-n} . z < f(x) \leq 2^{-n} . (z + 1)\}$.

On montre que, si $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ est $(\mathcal{B},\mathcal{C})$-mesurable et si $g : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}$ (resp $g : \mathcal{X} \mapsto \overline{\mathbf{R}}$) est une fonction $(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$-mesurable (resp $(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}})$-mesurable), alors g est $f^{-1}(\mathcal{C})$-mesurable ssi il existe $\varphi : F \mapsto \mathbf{R}$ (resp $\varphi : F \mapsto \overline{\mathbf{R}}$), fonction $(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$-mesurable (resp $(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\overline{\mathbf{R}}})$-mesurable), tq $g = \varphi \circ f$.