ARRANGEMENT (B2, M3)
(04 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit E et F deux **ensembles** finis (avec Card E = m et Card F = n).

(i) **Arrangement avec répétition** :

(a) on appelle **arrangement avec répétition** de m éléments parmi n toute application $f \in \mathcal{A}(E, F) = F^E$.

Le nombre d'arrangements avec répétition, ie le nombre d'éléments f de F^E, est :

(1) $A_n^m = \text{Card } F^E = (\text{Card } F)^{\text{Card } E} = n^m$.

Ce nombre, aussi noté $A_r(n, m) = n^m$, vérifie l'**équation de récurrence** :

(2) $A_n^m = m \,.\, A_{n-1}^m$, avec $A_1^m = 1$ et $A_n^1 = n$;

(b) en **analyse combinatoire**, A_n^m est le nombre de dispositions ordonnées (avec répétitions éventuelles) constituées de m éléments choisis parmi n éléments donnés. On définit ainsi un **schéma d'urne** avec remise (cf aussi **échantillon avec remise**, **sondage avec remise**).

(ii) **Arrangement sans répétition** :

(a) Si $m \leq n$, on appelle **arrangement sans répétition** de m éléments parmi n toute **application injective** $f \in \mathcal{I}(E, F)$.

Le nombre d'arrangements sans répétition, ie le nombre d'éléments $f \in \mathcal{I}(E, F)$, est :

(3) $A_n^m = \text{Card } \mathcal{I}(E, F) = (\text{Card } E)\,! \,/\, (\text{Card } E - \text{Card } F)\,! = n\,! \,/\, (n - m)\,!$.

Ce second sens est entendu par défaut lorsque l'on parle d' « arrangement ». On a donc $A_n^m = n\,(n - 1) \ldots (n - m + 1)$.

En particulier, si n = m, $A_n^n = n\,!$ est appelé **nombre de permutations** de m éléments.

Ce nombre est aussi noté $n^{[m]}$ (m-ième **puissance factorielle** de n), ou $n_{[m]}$, ou encore $(n)_m$. Il vérifie :

(4)
$$A_n^m = n \,.\, A_{n-1}^{m-1} = A_{n-1}^m + m \,.\, A_{n-1}^{m-1}, \text{ avec } A_n^1 = n \text{ et } A_n^n = n\,!\,,$$
$$A_n^m = m\,! \,.\, C_n^m \,;$$

(b) en **analyse combinatoire**, A_n^m est le nombre de dispositions ordonnées (sans répétition possible) constituées de m éléments (ou « objets ») choisis parmi les n éléments donnés. On définit ainsi un **schéma d'urne sans remise** (cf aussi **échantillon sans remise**, **sondage sans remise**).

(iii) La notion d'arrangement se retrouve notamment en **théorie des sondages** : **sondage bernoullien** (cf **schéma de BERNOULLI**), **sondage exhaustif**. Elle est parfois conservée dans le vocabulaire lorsque E ou F ne sont plus finis.