BLOC ALÉATOIRE (I, L)
(24 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (Ω, $\mathcal{T}$, P) un **espace probabilisé** et X : $\Omega \mapsto \mathbf{R}^N$ un N-**échantillon aléatoire** indépendant. On suppose que N = L . M (L **traitements** et M **blocs**) et que X peut donc s'écrire (X_{lm}) ($\forall$ (l, m) $\in N_L^* \times N_M^*$), où chaque **va** X_{lm} admet pour **lp** une **loi** $P^{X(lm)}$, dont la **fonction de répartition** F_{lm} est supposée absolument continue pr à λ (cf **loi absolument continue**) (on note lm pour désigner (l, m) ou l,m).

Ainsi, en écologie (agronomie) ou en biologie, X_{lm} est le résultat du traitement n° l appliqué au bloc n° m.

(ii) Le **problème du bloc aléatoire** est un **problème de test** relatif à l'**hypothèse du bloc aléatoire** suivante :

(1) $H_0 : F_{lm} = F_m , \forall l \in N_L^*$ (F_{lm} ne dépend pas du traitement l, $\forall$ bloc m).

L'**alternative** peut être :

(a) une **alternative de position** :

(2) $H_a : F_{lm} (x_{lm}) = F_m (x_{lm} - \alpha_l), \quad \forall x_{lm} \in \mathbf{R}$,

dans laquelle il existe au moins un couple (i, j) $\in (N_L^*)^2$ (avec j $\neq$ i) tq $\alpha_j \neq \alpha_i$. Ce test équivaut au test de $H_0 : \alpha \notin \Delta_L$ contre $H_a : \alpha \in \Delta_L$, où $\Delta_L = \{\lambda . e_L : \lambda \in \mathbf{R}\}$ est la **première bissectrice** de $\mathbf{R}^L$ et où l'on note $\alpha = (\alpha_1 ,..., \alpha_L)'$. Cette situation se rencontre eg dans l'**analyse de la variance à deux facteurs** équilibrés sans **intéraction**.

(b) une **alternative de position ordonnée**, analogue à la précédente, où l'on suppose, de plus, que (eg) $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_L$. D'un point de vue terminologique, la **matrice** X = $(X_{lm})_{(l,m)}$ est parfois appelée **matrice des blocs**, ou **plan d'expérience** à deux facteurs équilibrés. Cette matrice est constituée de **blocs équilibrés** car chaque bloc m fait l'objet d'un même nombre L de traitements l.

S'agissant d'un test, l'approche paramétrique consiste à calculer :

(3)
$$S_1^2 = M \Sigma_{l=1}^L (\bar{X}_{l.} - \bar{X}_{..})^2,$$
$$S_2^2 = \Sigma_{l=1}^L \Sigma_{m=1}^M (X_{lm} - \bar{X}_{l.} + \bar{X}_{.m} + \bar{X}_{..})^2.$$

En cas de **normalité**, la **statistique** :

(4) $F_{LM} = A_L / B_{LM}$,

dans laquelle $A_L = (L - 1)^{-1} S_1^2$ et $B_{LM} = (L - 1)^{-1} (M - 1)^{-1} S_2^2$, suit la **loi de FISHER** $\mathcal{F}$ (L-1, (L-1)(M-1)), ce qui permet de tester l'hypothèse H_0 d'effets identiques des traitements l sur les blocs m.

Une approche non paramétrique peut utiliser eg la **statistique des rangs de M. FRIEDMAN** (corrigée ici des **rangs multiples**) :

(5) $D_{LM} = A_{LM} / (B_{LM} - C_{LM})$,

dans laquelle :

$A_{LM} = (L - 1) . \Sigma_{l=1}^{L} \{R_l - (1/2) (L + 1) M\}^2$,

$B_{LM} = \Sigma_{l=1}^{L} \Sigma_{m=1}^{M} \{R (X_{lm})\}^2$,

$C_{LM} = (1/4) . L . (L + 1)^2$,

et $R_l = \Sigma_{m=1}^{M} R (X_{lm})$ est la somme des rangs intra-blocs du traitement n° l.

La loi approximative de D_{LM} est $\mathcal{X}_{L-1}^2$ (**loi du chi-deux**).

Si l'on remplace formellement les X_{lm} et les moyennes de la formule (2) par les **rangs** $R (X_{lm})$ et leurs moyennes respectives, on obtient la statistique :

(6) $D'_{LM} = A_{LM} / B_{LM}$,

avec $A_{LM} = (L - 1)^{-1} D_{LM}$ et $B_{LM} = (L-1)^{-1}(M-1)^{-1} \{M (L-1) - D_{LM}\}$.

D'_{LM} est en relation monotone croissante avec D_{LM} , ce qui rend équivalents les tests fondés sur ces deux statistiques.