BOULE D'UN ESPACE MÉTRIQUE (A4)

(15 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit (E, d) un **espace métrique**, $a \in E$ et $r \in \mathbf{R}_+^*$.

On appelle :

(a) **boule ouverte** de centre a et de rayon r de E l'ensemble :

$$(1) \quad B(a, r) = \{x \in E : d(x, a) < r\};$$

(b) **boule fermée** de centre a et de rayon r de E l'ensemble :

$$(2) \quad \bar{B}(a, r) = \{x \in E : d(x, a) \leq r\};$$

(c) **sphère** de centre a et de rayon r de E l'ensemble :

$$(3) \quad S(a, r) = \{x \in E : d(x, a) = r\}.$$

(ii) Ces trois parties de E vérifient la propriété :

$$(4) \quad B(a, r) \cup S(a, r) = \bar{B}(a, r) = B(a, r)^f,$$

où les derniers termes désignent la fermeture de $B(a, r)$.

(iii) Si $E = \mathbf{R}^n$ et si d est la distance euclidienne dans $\mathbf{R}^n$ (cf **espace euclidien**) :

$$(5) \quad d(x, y) = \|x - y\| = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2},$$

on montre que toute boule ouverte (resp fermée) de centre a et de rayon r a pour **volume** le nombre $r^n V_n$, où V_n désigne le **volume** de la **boule unité** de $\mathbf{R}^n$ au sens de la **norme** euclidienne $\|\cdot\|_2$, ie la boule :

$$(6) \quad \bar{B}(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2^2 \leq 1\}.$$

Ce volume est donné par la formule :

$$(7) \quad V_n = \begin{cases} \pi^k / k!, & \text{si } n = 2k \in 2\mathbf{N}^*, \\ 2^k \pi^{k-1} / \{1.3. \dots .(2k-1)\}, & \text{si } n = 2k - 1 \in 2\mathbf{N}^* - 1, \end{cases}$$

(avec $\pi = 3,14159265359\dots$), soit, de façon condensée :

$$(8) \quad V_n = \pi^{n/2} \cdot \{\Gamma(1 + (n/2))\}^{-1},$$

où Γ désigne la **fonction Gamma**.