CARACTÉRISTIQUE, CARACTÉRISTIQUE LÉGALE (C5, F3)
(19 / 10 / 2021, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2021)

On emploie parfois le terme de **caractéristique** avec le sens de **caractère** (variable observable sur une **unité statistique**) ou d'**attribut**, ie de **variable qualitative**.

Une autre signification importante se rapporte à la **caractérisation d'une loi de probabilité** à travers des grandeurs (généralement scalaires ou fonctionnelles) qui peuvent s'en déduire (cf aussi **paramètre**) : on parle alors de **caractéristique légale**, ou simplement de **caractéristique**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P^{\xi})$ un **espace d'observation**, image du premier par une **va** $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.

On appelle **caractéristique légale**, ou **caractéristique**, **(théorique)** de P^{ξ} (ou de ξ) tout élément γ qui peut être associé à P^{ξ} (ou à ξ) en vue de la caractériser ou de la décrire (cf aussi **forme**, **forme légale**) : γ peut être un **moment algébrique** d'ordre j (eg **espérance mathématique**, **variance**), un **quantile** d'ordre p, un **mode**, ou encore une **fonction de répartition**, une **densité de probabilité**, une **fonction caractéristique**, etc.

Cet élément est susceptible de parcourir un ensemble Γ de « valeurs », alors appelé **ensemble des caractéristiques**, ou **ensemble caractéristique**, de P^{ξ}.

(ii) Plus généralement, si $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^{\xi})$ est un **modèle image** d'un **modèle statistique** de base $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ par $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$, il existe en général une application de P^{ξ} dans Γ définie par :

(1) $\quad c : P^{\xi} \mapsto c(P^{\xi}) = \gamma$,

qui associe à toute lp P^{ξ} une **caractéristique** γ : cette application est appelée **application caractéristique**, ou encore **caractérisation**, de P^{ξ}.

Cette notion est différente de celle de **fonction caractéristique**, mais une fc peut être considérée comme une caractéristique légale fonctionnelle.

(iii) A titre d'exemples :

(a) lorsque $\xi \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{R}K}(\Omega, \mathcal{T}, P)$ (où **R**K désigne $\mathbf{R}^K$), $\forall P \in \mathcal{P}$, et que $\Gamma = \mathbf{R}^K$, on considère souvent l'**espérance mathématique** $\gamma = E\,\xi$. Si K = 1, on peut considérer la **médiane** $\gamma = Q_{1/2}\,\xi$ (même si l'ensemble médian $Q_{1/2}\,\xi$ ne se réduit pas à un seul point), ou encore le **mode** $\gamma = S\,\xi$ (même si la zone modale $S\,\xi$ n'est pas ponctuelle) (cf **centralité**) ;

(b) lorsque P^ξ admet une (classe de) **densité**(s) f_ξ (resp une (classe de) **fr** F_ξ) pr à une **mesure positive** μ définie sur $\mathscr{B}$, on peut considérer pour caractéristique la densité $\gamma = f_\xi$ (resp la **fonction de répartition** $\gamma = F_\xi$).

(iv) Le plus souvent, plusieurs caractéristiques γ_1 ,..., γ_Q de P^ξ (ou de ξ) sont considérées simultanément, resp à valeurs dans des ensembles Γ_1 ,..., Γ_Q . On pose alors :

(2) $\quad \Gamma = \prod_{q=1}^{Q} \Gamma_q$ et $\quad c = (c_1 ,..., c_Q) : \mathscr{P}^\xi \mapsto \Gamma$.

Ainsi :

(a) lorsque $\xi \in \mathscr{L}_{RK}^2 (\Omega, \mathscr{T}, P)$, $\forall P \in \mathscr{P}$, on considère souvent (eg **modèle de régression**) le couple $\gamma_1 = c_1 (P^\xi) = E\, \xi$ et $\gamma_2 = c_2 (P^\xi) = V\, \xi$. Ici, $\Gamma_1 = \mathbf{R}^K$ et $\Gamma_2 = M^+_K (\mathbf{R}) \cap S_K (\mathbf{R})$ (ensemble des matrices symétriques réelles semi-définies positives) (cf **matrice symétrique**, **matrice définie positive**) ;

(b) lorsque $dP^\xi / d\mu = f_\xi$, et que f_ξ est de classe C^1 (ce qui suppose que Ω est un **espace normé**), on considère parfois (eg en **statistique non paramétrique**) $\gamma_1 = c_1 (P^\xi) = f_\xi$ et $\gamma_2 = c_2 (P^\xi) = f_\xi'$. Ici, on a $\Gamma_1 = \mathscr{D}$ (ensemble des (classes de) densité(s)) $f_\xi = dP^\xi / d\mu$, où $P^\xi \in \mathscr{P}^\xi$) et $\Gamma_2 = \mathscr{L}$ (ensemble des dérivées f_ξ' considérées comme **applications linéaires**) (en identifiant les classes de densités μ-équivalentes avec leurs représentants).

Dans le cas paramétrique fréquent, où $\mathscr{P}^\xi = (P_\theta^\xi)_{\theta \in \Theta}$ est une **famille** de **lp** indexée par un **espace vectoriel** Θ de dimension finie (ensemble des valeurs du **paramètre** vectoriel θ), certaines caractéristiques peuvent aussi être des paramètres, ou inversement, ie :

(3) $\quad \Gamma \cap \Theta \neq \varnothing$.

(v) Une caractéristique γ peut ainsi être un **paramètre d'intérêt** θ, et inversement. A titre d'exemple, lorsque $P_\theta^\xi = \mathscr{N}_K (\mu, \Sigma)$ (**loi normale multidimensionnelle**), avec $\theta = (\mu, \Sigma)$ et $\Theta = \mathbf{R}^K \times (M_K^+ (\mathbf{R}) \cap S_K (\mathbf{R}))$, alors $\mu = E\, \xi$ et $\Sigma = V\, \xi$ (**espérance**, **dispersion**).

(vi) Dans certaines situations (eg en **théorie bayésienne**), il est possible de munir l'ensemble Γ d'une structure d'**espace mesurable** (resp d'**espace mesuré**), noté $(\Gamma, \mathscr{B}_\Gamma)$ (resp $(\Gamma, \mathscr{B}_\Gamma, \nu)$, où ν est une **mesure positive** définie sur $\mathscr{B}_\Gamma$. On appelle alors **(mesure de) probabilité a priori** sur Γ une **mesure de probabilité** Π définie sur $\mathscr{B}_\Gamma$ et, en général, supposée absolument continue pr à ν, la **dérivée de NIKODYM-RADON** $d\Pi / d\nu$ étant appelée **densité a priori**. Si l'on pose $\Gamma = \mathscr{P}^\xi$ et $c = id\, (\mathscr{P}^\xi)$

(**identité** de $\mathscr{P}^{\xi}$), on admet aussi, par extension, que P^{ξ} est une caractéristique d'elle-même (avec $\Gamma = \mathscr{P}^{\xi}$ et c : $\mathscr{P}^{\xi} \mapsto \Gamma$).

(vii) La notion de caractéristique est donc très générale. On peut établir la classification simplifiée de la notion de caractéristique comme suit :

(a) **caractéristique de position**, ou **caractéristique de localisation**, ou **caractéristique de centralité** (cf aussi **paramètre de position**) ;

(b) **caractéristique d'échelle**, ou **caractéristique de dispersion** (cf aussi **paramètre d'échelle**) ;

(c) **caractéristique de concentration** ou **caractéristique de densification**, ou, à l'inverse, **caractéristique d'éparpillement** ou **caractéristique de raréfaction** ;

(d) **caractéristique de forme** : **asymétrie**, **aplatissement**, **concentration** (cf précédente), etc ;

(e) **caractéristique fonctionnelle** : **densité de probabilité**, **fonction de répartition**, **fonction génératrice**, **fonction caractéristique** (cf **transformée de FOURIER**), **régression**, etc (cf aussi **fonctionnelle**).

(viii) Les **caractéristiques théoriques** précédentes se distinguent des **caractéristiques empiriques** en raison de leur mode de calcul :

(a) soit à partir de la **loi de probabilité** (théorique) P^{ζ} d'une **variable aléatoire** ζ (a priori) **observable** qui se relie à (ie décrit) un **phénomène** donné : cette loi permet de définir la notion de **caractéristique théorique** ;

(b) soit à partir d'un ensemble de N valeurs prises par un **échantillon aléatoire** $Z = (Z_1 ,..., Z_N)$ dont la loi est $P^Z = Z\,(P)$: la **loi empirique** P_N de Z permet alors de définir la notion de **caractéristique empirique**. Autrement dit, ζ est observée sur N **unités statistiques** a_n (n = 1 ,..., N) « participant » au phénomène considéré, avec $Z_n = \zeta\,(a_n)$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}_N^*$. En particulier, lorsque Z est un **échantillon iid** issu de P^{ζ}, les Z_n sont des **copies** de ζ, ie $P^Z = (P^{\zeta})^{\otimes N}$.

Cette loi empirique permet aussi le calcul de diverses **statistiques** (cf aussi **fonction des moments empiriques**). En effet, une caractéristique théorique admet généralement pour estimateur naturel la **caractéristique empirique** analogue, ie celle calculée à l'aide de P_N (cf **statistique naturelle**). Si l'opération c a un sens, une caractéristique $\gamma = c\,(P^{\zeta})$ peut ainsi être (a priori) estimée par son analogue empirique $g_N = c\,(P_N)$.

Cet **estimateur** n'est pas nécessairement le meilleur et doit parfois être corrigé (cf **correction**, **modification**, **moment corrigé**).

(ix) Selon la nature de la **variable aléatoire** considérée ou de sa **loi de probabilité**, la définition d'une caractéristique peut posséder un sens ou non. Ainsi :

(a) le **mode** peut (généralement) être défini aussi bien pour une **variable qualitative** κ que pour une **variable numérique** ξ. Il en va de même pour la notion de « **densité** » (cf **densité de probabilité**), à condition d'étendre sa définition en la **suite** $((k_1 , p_1) ..., (k_M , p_M))$, dans laquelle $(k_1 ..., k_M)$ est la suite des modalités de κ et $(p_1 ..., p_M)$ celle de ses fréquences (théoriques), ou probabilités, associées ;

(b) de même, on peut associer la notion de **quantile** à une **variable ordinale** (si le nombre M de ses modalités est suffisant).

A l'inverse, ces propriétés ne sont pas vérifiées pour une **dispersion** (eg **variance**).