CHAÎNE DE EHRENFEST (N2)
(14 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La **chaîne de EHRENFEST** est une **chaîne de MARKOV** récurrente et irréductible, utilisée (physique, biologie) comme **modèle de diffusion** à travers des parois poreuses (cf **chaîne de MARKOV irréductible**, **processus de diffusion**).

(i) Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ une **partie compacte** et connexe (cf **partie connexe**), et Ω' et Ω'' deux parties de Ω tq :

(a) Ω' et Ω'' sont compactes, connexes et non vides ;

(b) $D = (\text{Int}\,\Omega) \setminus (\text{Int}\,\Omega' \cap \text{Int}\,\Omega'') \neq \varnothing$.

D est appelée **paroi de diffusion** entre Ω' et Ω''.

Soit ω_1 ,..., ω_p des éléments de Ω, appelés **particules**, susceptibles de traverser D. La **variable de comptage** :

(1) $$N_t = \Sigma_{j=1}^{p} \Sigma_{s \in \mathbf{N}} \mathbf{1}_{[\omega(j) \in \Omega' \text{ et } s = t]}$$

(nombre d'éléments $\omega_j \in \Omega'$ à l'instant $t \in \mathbf{N}$, en notant $\omega(j)$ pour désigner ω_j), prend ses valeurs dans $N_p = \{0, 1, ..., p\}$.

Le **modèle de diffusion de P. et T. EHRENFEST** postule que le **processus** $(N_t)_{t \in \mathbf{N}}$ définit une chaîne de MARKOV dont la **matrice de transition** P vérifie :

(2) $$p_{x,x-1} = x / p, \quad \forall x \in N_p ,$$
$$p_{x,x+1} = (p - x) / p, \quad \forall x \in N_p .$$

(ii) Autrement dit, à chaque instant $t \in \mathbf{N}$, la **probabilité** pour que la transition entre les instants t et t+1 se fasse de Ω' vers Ω'' (resp de Ω'' vers Ω') est proportionnelle au nombre de particules présentes dans Ω' (resp dans Ω''), ie :

(3) $$p_{x,x-1} / x = p_{x,x+1} / (p - x).$$