**CHAÎNE DE MARKOV (N)**
(25 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **chaîne de MARKOV** est un **processus stochastique** qui peut être défini et classé de plusieurs façons. On distingue ces cas en fonction de la nature ou de la **structure** de l'**espace des états** et de l'**espace du temps**.

(i) **Chaîne à espace d'état discret et temps discret**.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace mesurable** (en général, un **espace d'observation**), T un **ensemble** d'**indices**, $X = (X_t)_{t \in T}$ une famille de **va** définies sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathcal{X}$, et $P = (p_{xy})_{(x,y) \in \mathcal{X}2}$ une **matrice de transition** (de format infini ou non).

On suppose que :

(a) $\mathcal{X}$ est un ensemble non vide (« **ensemble des états** ») au plus dénombrable (cf **espace d'état**) ;

(b) $x_0 \in \mathcal{X}$ est un **état** donné ;

(c) X est en **temps** discret, avec $T = \mathbf{N}$. On note alors $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la **suite** des **va** $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.

On dit que X est une **chaîne de A.A. MARKOV**, ou un **processus de A.A. MARKOV**, **en temps discret**, d'**état initial** $x_0$ , de **loi de probabilité** initiale p et de **matrice de transition** P, ssi X vérifie les deux propriétés suivantes :

$$P([X_0 = x_0]) = p(x_0), \qquad \forall x_0 \in \mathcal{X},$$

(0)

$$P([X_n = x_n] / \cap_{i=0}^{n-1} [X_i = x_i]) = p_{x(n-1),x(n)} , \forall (x_0 ,..., x_{n-1}) \in \mathcal{X}^n \text{ tq } P(\cap_{i=0}^{n-1} [X_i = x_i]) > 0, \forall x_n \in \mathcal{X} \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},$$

(où x(i) désigne, par commodité, $x_i$).

La seconde propriété est parfois appelée **propriété de MARKOV d'ordre 1**.

La définition (0) exprime, $\forall n \in \mathbf{N}$, que le conditionnement de chaque $X_n$ par les $X_\alpha$ « précédents » ($\alpha = 0 ,..., n-1$) admet pour représentation la matrice P.

Les propriétés (0) se regroupent selon l'équation scalaire :

(1) $$P(\cap_{i=0}^{n} [X_i = x_i]) = p(x_0) . p_{x(0),x(1)} \dots p_{x(n-1),x(n)} , \forall (x_0 ,..., x_n) \in \mathcal{X}^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N},$$

ou bien selon (en notant X(i) pour désigner $X_i$) :

(2) $P^{(X(0),\dots,X(n))} = p \,.\, (\Pi_{i=1}^{n} p_{x(i-1),\,x(i)})$.

Les probabilités $p_{x(i-1),x(i)}$ sont appelées **probabilités de transition** de l'**état** x (i-1) = $x_{i-1}$ vers l'état x (i) = $x_i$ (ou entre ces deux états).

Dans (0), (1) ou (2), la matrice de transition P était supposée ne pas dépendre de n : on dit alors que X est une **chaîne homogène** ;

Si P dépend de n, ie si $P^n = (p^n_{xy})_{(x,y) \in \mathscr{X}2}$ , $\forall$ n $\in$ **N**, on dit que X est une **chaîne non homogène**, ou parfois une **chaîne inhomogène**. Dans ce cas, (2) se réécrit sous la forme :

(2)' $P^{(X(0),\dots,X(n))} = p \,.\, (\Pi_{i=1}^{n} p^n_{x(i-1),\,x(i)})$.

Une **trajectoire** de X dans $\mathscr{X}$ est alors une suite x = $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{X}$ (ie un élément de $\mathscr{X}^{\mathbf{N}}$). L'espace $\mathscr{X}^{\mathbf{N}}$ des trajectoires est muni de $\mathscr{B}(\mathscr{X}^{\mathbf{N}})$, **tribu engendrée** par les applications coordonnées $X_n$ ($\forall$ n $\in$ **N**). Pour chaque n $\in$ **N**, on note $\mathscr{B}_n$ la sous-tribu de $\mathscr{B}(\mathscr{X}^{\mathbf{N}})$ engendrée par les n + 1 premières applications $X_i$ ($\forall$ i $\in$ $N_n$) : chaque **événement** B $\in$ $\mathscr{B}_n$ est appelé **évènement antérieur à l'instant** n, ou **évènement antérieur à la période** n, ou encore **évènement antérieur à la date** n.

De plus, $(\mathscr{B}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion) (cf **suite monotone de parties**) et engendre la tribu $\mathscr{B}(\mathscr{X}^{\mathbf{N}}) = \sigma(\cup_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{B}_n)$ (cf **filtration**).

(ii) **Chaîne à espace d'état quelconque et temps discret**.

La notion de chaîne de MARKOV s'étend à un espace d'état ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) non nécessairement discret.

Soit X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un processus stochastique en **temps** discret (ie avec T = **N**), p une **mesure positive** sur $\mathscr{B}$ et $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de **noyaux stochastiques** sur ($\Omega$, $\mathscr{B}$), avec $P_0$ = p.

On dit alors que X est une **chaîne de A.A. MARKOV** ssi la **loi marginale** (**loi** image de P par la suite tronquée initiale) :

(3) $P^{(X(0),\dots,X(n))} = (X_0,\dots,X_n)(P)$

est définie par la **propriété de A.A. MARKOV** suivante :

(4) $P^{(X(0),\dots,X(n))}(B_0 \times \dots \times B_n) = \int \mathbf{1}(B_0)\, p\,(dx_0) \int \mathbf{1}(B_1)\, P_1(x, dx_1) \dots \int \mathbf{1}(B_{n-1})\, P_{n-1}(x_{n-1}, B_n)$

(où l'on note encore $X(n)$ pour désigner $X_n$).

La loi p est appelée **loi initiale** de la chaîne X. On appelle aussi X le **processus de MARKOV associé** à p. La suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est par fois appelée **suite des probabilités de transition** pas à pas, ou **suite des transitions** (pas à pas).

On dit encore que X est une **chaîne homogène** ssi $P_n$ ne dépend pas de n, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

S'il existe un point $x_0 \in \mathscr{X}$ tq $p = \delta\,(x_0)$ (**loi de DIRAC** au point $x_0$), on dit que $x_0$ est l'**état initial** de X. En posant, $\forall\, \alpha \in N$ tq $\alpha < n$ :

(5) $\quad P_{n\alpha}\,(x, B) \;=\; \int_{\mathscr{X}} P_{n+1}\,(x, dx_{n+1}) \int_{\mathscr{X}} P_{n+2}\,(x_{n+1}\,, dx_{n+2}) \ldots \int_{\mathscr{X}} P_{\alpha-1}\,(x_{\alpha-2}\,, dx_{\alpha-1})\, P\,(x_{\alpha-1}\,, B)$

(probabilité de transition entre un état x et une région $B \in \mathscr{B}$ entre les instants n et $\alpha$), on obtient l'**équation de S. CHAPMAN - A.N. KOLMOGOROV** :

(6) $\quad P_{n\alpha}\,(x, B) \;=\; \int_{\mathscr{X}} P_{n\,\beta}\,(x, dy)\, P_{\beta\,\alpha}\,(y, B), \quad \forall\, (n, \beta, \alpha) \in (\mathbf{N}^*)^3_<\;$ (ie $n < \beta < \alpha$).

(iii) **Chaîne à espace d'état discret et temps continu**.

$\mathscr{X}$ étant supposé discret, la notion de chaîne de MARKOV peut s'étendre à une chaîne en temps continu (ie avec $T \subset \mathbf{R}$ : eg $T = \mathbf{R}_+$).

La **matrice de transition** $P\,(s, t)$ entre les instants s et t est alors définie selon :

(7) $\quad P_{xy}\,(s, t) \;=\; P\,(X_t = y \,/\, X_s = x), \quad \forall\, (s, t) \in T^2_{\leq}\,, \forall\, (x, y) \in \mathscr{X}^2.$

On appelle **matrice d'intensité** de X à l'instant t la matrice (lorsqu'elle existe) $Q\,(t)$ définie selon :

(8) $\quad Q\,(t) \;=\; \lim_{h+k \to 0+}\, (h + k)^{-1}\,.\,\{P\,(t-h, t+k) - I\}, \quad \forall\, t \in T,$

où I désigne la matrice (ou l'opérateur) unité.

Si X est une **chaîne temporellement homogène**, alors $P\,(s, t) = P\,(t-s)$ et $Q\,(t) = Q$ (matrice indépendante de t), $\forall\, (s, t) \in T^2_{\leq}$ .

On dit que :

(a) X est une **chaîne de MARKOV irréductible** ssi, $\forall\, (x, y) \in \mathscr{X}^2$ et $\forall\, s \in T$, il existe $t_1 > s$ et $t_2 > s$ tq : $P_{xy}\,(s, t_1) > 0$ et $P_{yx}\,(s, t_2) > 0$ ;

(b) X est une **chaîne de MARKOV ergodique** ssi il existe $(p_x)_{x \in \mathscr{X}}$ tq (cf **ergodicité**) :

$p_x \geq 0$ ($\forall$ x $\in \mathscr{X}$) et $\Sigma_{x \in \mathscr{X}}$ $p_x = 1$,

$\lim_{t \to +\infty} P_{xy}(s, t) = p_x$, $\forall$ (x, y) $\in \mathscr{X}^2$, $\forall$ s $\in$ T.

L'**équation de S. CHAPMAN - A.N. KOLMOGOROV** devient :

(9) $\quad P_{xy}(s, t) = \Sigma_{z \in \mathscr{X}} P_{xz}(s) P_{zy}(t - s)$, $\qquad \forall (x, y) \in \mathscr{X}^2$ et $\forall$ s $\in$ [0, t].

Si l'on restreint T à **N**, on en déduit la forme matricielle :

(10) $\quad P(t) = P(s) . P(t - s)$, $\qquad \forall s \in N_t = \{0, 1,..., t\}$,

avec $P(t) = (p_{xy}(t))_{(x,y) \in \mathscr{X}2}$ (matrice infinie, ou **suite** double), où $\mathscr{X}2$ désigne $\mathscr{X}^2$.

Ces résultats sont notamment utilisés dans l'étude du **processus de naissance et de mort**.

(iv) **Chaîne à espace d'état fini et temps discret**.

En particulier, on appelle **chaîne de A.A. MARKOV à espace d'états fini** (et en temps discret T = **N***) un processus X tq :

(a) $\mathscr{X} = \{x_1 ,.., x_n\}$ (ensemble fini) ;

(b) X est dans un état $x_i$ à un instant (ou pendant la « **transition** ») t $\in$ **N*** ;

(c) la propriété d'être dans un état $x_j$ en t dépend, au plus, de l'état $x_i$ atteint en t - 1, et d'aucun autre antérieur.

La probabilité pour que $x_j$ soit atteint en t sachant que $x_i$ a été atteint en t - 1 est notée $p_{ij}$, $\forall (x_i , x_j) \in \mathscr{X}^2$. La matrice de transition $P = (p_{ij})_{(i,j) \in \{1 ,..., n\} \times \{1 ,..., n\}}$ est alors une **matrice stochastique**.

Par suite, la **matrice de transition** d'ordre h $\in$ **N***, notée $P^{(h)}$, admet pour élément générique $p_{ij}^{(h)}$, ie la probabilité pour que X passe de l'état $x_i$ à l'état $x_j$ en h transitions : on établit alors que $P^{(h)} = P^h$ (puissance ordinaire de P).

On appelle **état absorbant** de X un état a $\in \mathscr{X}$ tq $X_t = a$ dès que $t \geq t_m$ (ie à partir d'un instant donné $t_m$). Cet état est donc tq $a = x_i$, $\forall i \in N_n^*$ et la i-ième ligne de la matrice de transition P vérifie $p_{ii} = 1$ et $p_{ij} = 0$, $\forall j \neq i$.

La notion d'**absorption** s'étend d'un élément à une région B $\in \mathscr{B}$ (cf aussi **barrière absorbante**). Ceci spécialise la notion d'absorption pour des processus généraux. Il en va de même des notions de **réfléchissement** (cf **principe de réfléchissement**).

(v) D'un point de vue terminologique :

(a) on emploie souvent l'expression de **processus de MARKOV** alternativement à celle de « chaîne de MARKOV » ;

(b) on réserve parfois l'expression de « chaîne de MARKOV » à un processus de MARKOV à espace d'états discret, que ce processus soit en temps discret ou en temps continu.

(vi) L'étude statistique des chaînes de MARKOV porte notamment sur l'**estimation** de la matrice de transition P : celle-ci nécessite la connaissance (ou l'**observation**) du nombre $n_{x(i-1),x(i)}$ d'**unités statistiques** qui transitent de l'état $x_{i-1}$ vers l'état $x_i$ .

L'estimation s'effectue souvent à l'aide de procédures générales : **méthode du maximum de vraisemblance contraint** ou **maximum de vraisemblance contraint**, etc.