

CHAÎNE DE MARKOV ERGODIQUE (N2)

(15 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ une **chaîne de MARKOV** en **temps** discret (avec $T = \mathbf{N}$), à **espace d'état** fini $\mathcal{X} = \{1, \dots, k\} = \mathbf{N}_k^*$ et à **probabilités de transition** stationnaires (cf **stationnarité**). On suppose ce processus déterminé par la **loi initiale** :

$$(1) \quad p_x = P([X_0 = x_0]), \quad \forall x_0 \in \mathcal{X},$$

et par les **probabilités de transition** successives :

$$(2) \quad p_{xy} = P([X_{n+1} = y] / [X_n = x]),$$

éléments de la (k,k) -matrice $P = (p_{xy})$, avec $P e_k = e_k$ (**matrice stochastique** à droite).

Si X est une **chaîne** récurrente et possède une seule **classe de récurrence**, on dit que X est une **chaîne ergodique** (cf **états d'une chaîne de MARKOV**).

(ii) Cette terminologie est justifiée par le **théorème ergodique pour des chaînes de MARKOV finies** suivant. Si l'on note $v \in S_k$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^k$) l'unique **vecteur propre** de P associé à la **valeur propre** $\lambda = 1$ (ie $P v = v$), alors X vérifie la **propriété d'ergodicité** :

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \cdot (I_k + P + \dots + P^{n-1}) = A,$$

avec la **matrice** $A = [v' \dots v'] \in M_k(\mathbf{R})$.

Si $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}$ est une **fonction numérique** donnée et $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ le processus défini par (**changement de variable aléatoire** dans l'espace des états) $Y_n = f(X_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, on établit la **loi forte des grands nombres pour les chaînes de MARKOV finies** :

$$(4) \quad S_n / n \xrightarrow{p.s.} \sum_{j=1}^k v_j \cdot f(j) = \mu,$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i$ et $v_j = \text{pr}_j v$.

Si l'on pose (notations matricielles) :

$$(5) \quad \begin{aligned} Z &= (I_k - P + A)^{-1} = (z_{ij})_{(i,j)}, \\ C &= (c_{ij})_{(i,j)}, \end{aligned}$$

avec $c_{ij} = v_i \cdot z_{ij} + v_j \cdot z_{ji} - \delta_{ij} \cdot v_i - v_i \cdot v_j$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f(i) \cdot c_{ij} \cdot f(j) = f' C f$, on établit la **convergence simple** :

$$(6) \quad n^{-1} \vee S_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \sigma^2.$$

Par suite, on établit les deux résultats fondamentaux suivants :

(a) **théorème de la limite centrale** pour les chaînes de MARKOV finies :

$$(7) \quad \sigma^2 > 0 \Rightarrow \mathcal{L} (n^{-1/2} \sigma^{-1} (S_n - n \mu)) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{N}_1 (0, 1) \text{ (loi normale) ;}$$

(b) **loi du logarithme itéré** pour les chaînes de MARKOV finies. Si $\sigma^2 > 0$, on a :

$$(8) \quad \begin{aligned} P (\lim_n \inf C_n < \lambda) &= 1, \quad \text{si } \lambda > 1, \\ P (\lim_n \inf C_n > \lambda) &= 1, \quad \text{si } \lambda \leq 1, \end{aligned}$$

où $C_n = (2 n \ln^2 n)^{-1/2} (S_n - n \mu)$ et $\ln^2 n = \ln (\ln n)$ désigne le **logarithme (népérien) itéré** de $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$.