CHANGEMENT DE VARIABLE ALÉATOIRE (C2, K2)
(24 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^S$ un **vecteur aléatoire** de **loi** P^ξ. On considère le **changement de variable aléatoire** de $\mathbf{R}^S$ dans $\mathbf{R}^S$:

(1) $\xi \mapsto \eta = \varphi(\xi)$.

Si φ est un C^1-**difféomorphisme** de $\mathbf{R}^S$, et si $f = dP^\xi / dx$ est la **densité de probabilité** de P^ξ (pr à la **mesure de LEBESGUE** $\lambda_S = dx$), on montre que la loi P^η de η admet pour densité pr à λ_S la fonction g définie par (cf **changement de variable dans les intégrales**) :

(2) $g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \,.\, \mathrm{abs}\,|J(\varphi^{-1}(y))|$,

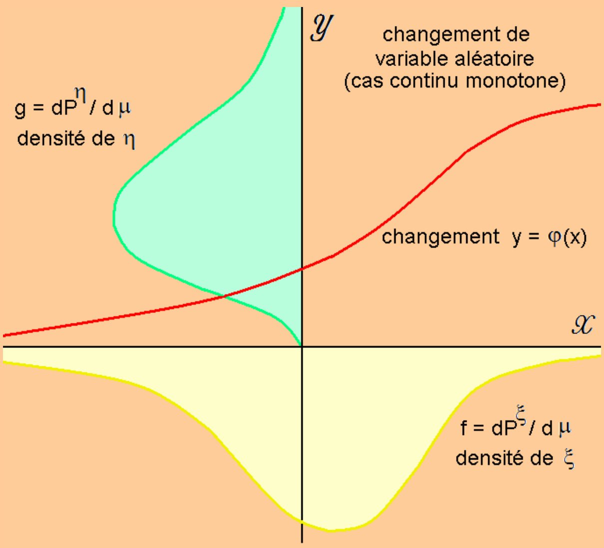
où abs dénote la **valeur absolue** et $J(\varphi^{-1}(y))$ la valeur de la **matrice jacobienne** Dx / Dy, d'éléments $(d\,\psi_i / d\,y_j)$, (avec $\psi = \varphi^{-1}$), au point $y \in \mathbf{R}^S$.

(ii) Si S = 1 (**vars**), si f est absolument continue pr à λ_1 (cf **fonction absolument continue**) et si $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est monotone, alors :

(a) si φ est strictement croissante, la **fr** G de η est donnée par :

(3) $G(y) = F(\varphi^{-1}(y))$,

où F dénote la **fonction de répartition** de ξ (cf graphique ci-dessous) ;



(b) si φ est strictement décroissante, la fr G de η est donnée par :

(4) $G(y) = 1 - F(\varphi^{-1}(y))$;

(c) dans tous les cas, la densité de P^η pr à λ_1 est donnée par :

(5) $g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) / \text{abs}\, f'(\varphi^{-1}(y))$.

(ii) A titre d'exemples, on peut citer :

(a) le **centrage-réduction** (cf **centrage**, **variable centrée**, **variable réduite**). Si $y = \varphi(x) = a + b\,x$, on obtient :

(1) si $b \neq 0$:

$$g(y) = |b|^{-1} . f((y - a) / b),$$

(6)
$$G(y) = \begin{cases} F((y - a) / b), & \text{si } b > 0, \\ 1 - F((y - a) / b), & \text{si } b < 0 ; \end{cases}$$

(2) si $b = 0$, alors η est une **va** presque sûrement constante (ie $\eta(\omega) = a$, $\forall\ \omega \in \Omega$), donc $\eta \sim \delta_a$ (**loi de DIRAC** au point a) ;

(b) l'**uniformisation**. Si l'on pose $\varphi = F$ (**fr** de la va ξ), alors $\eta \sim \mathcal{U}(0, 1)$ (**loi uniforme**) et (cf **lemme d'uniformisation des lois**) :

(7) $g(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y), \ \forall\ y \in \mathbf{R}$.

(iv) Lorsque φ ne satisfait pas les **conditions de régularité** précédentes, on peut, en général, appliquer encore la formule (2) de façon répétée. Ceci est le cas, notamment, lorsque φ est une **application k-injective** de $\mathbf{R}^S$ dans $\mathbf{R}^S$ (cf aussi **application injective**), et tq ses restrictions $\varphi_{/A(i)}$ à chaque classe B_i ($\forall\ i \in N_k^*$) de la partition canonique de $\mathbf{R}^S$ (induite par φ) vérifie (cf **restriction d'une application**) :

(8) $J_i = D\,\varphi_{/B(i)} / D\,x \neq 0, \quad \forall\ i \in N_k^*$,

où B_i est aussi notée (par commodité) B(i), $\forall$ i = 1,..., k.

Par suite, $\forall\ B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^S)$ tq $B = \cup_{i=1}^k B_i$ et $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $j \neq i$, on a :

(9)
$$P(\xi \in B) = \begin{cases} \int_B dP^\xi(x) = \Sigma_{i=1}^k \int_{B(i)} dP^\xi(x) = \Sigma_{i=1}^k \int \mathbf{1}(B_i)\, f(x)\, dx, \\ \Sigma_{i=1}^k \int \mathbf{1}(\varphi^{-1}(B_i))\, f(\varphi^{-1}(y))\, |J_i|^{-1}\, dy, \\ \Sigma_{i=1}^k \int \mathbf{1}(C_i)\, f(\varphi^{-1}(y))\, |J_i|^{-1}\, dy, \\ \int \Sigma_{i=1}^k f(\varphi^{-1}(y))\, |J_i|^{-1}\, dy = P(\eta \in C), \end{cases}$$

où $\mathbf{1}(A)$ désigne la **fonction indicatrice** d'une **partie** A et où $C_i = \varphi^{-1}(B_i)$ est aussi noté (par commodité) C(i), $\forall$ i = 1,...k.

Par suite :

(10) $g(y) = \Sigma_{i=1}^{k} f(\varphi^{-1}(y))\ .\ abs\ |J_i|^{-1}$.

De plus, si φ est dérivable (cf **dérivabilité**) et **dénombrablement inversible** (ie on peut partitionner **R** = $\xi(\Omega)$ à l'aide d'une famille au plus dénombrable R = $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tq $\cup_{n \in \mathbf{N}} R_n = \mathbf{R}$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$, et $R_\alpha \cap R_\beta = \emptyset$, $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ tq $\beta \neq \alpha$) ou se réduit à un point de mesure nulle, alors sur chaque classe de cette famille, φ est monotone et possède des inverses locales (ie les restrictions $\varphi_{/R(n)}$ sont inversibles). Par suite, la densité de P^η est donnée par la série suivante (lorsqu'elle converge) :

(11) $g(y) = \Sigma_{n \in \mathbf{N}} f(x_n) / (abs\ \varphi'(x_n)$,

dans laquelle les points x_n sont racines de l'équation :

(12) $y = \varphi(x)$ (ie $x_n = \varphi^{-1}{}_{/R(n)}(y)$),

où R(n) désigne R_n .

A titre d'exemple, si $y = \varphi(x) = x^2$ et si P^ξ est symétrique pr au point 0 (ie $P^{-\xi} = P^\xi$), on a $R_1 = \mathbf{R}^*_-$, $R_2 = \mathbf{R}_+$, $\varphi_{/R(1)} = \mathbf{1}(\mathbf{R}^*_-)(x)\ \varphi(x)$ et $\varphi_{/R(2)}(x) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(x)\ \varphi(x)$, d'où :

(13) $g(y) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+)(y)\ f(y^{1/2}) / y^{1/2}$.

(iv) Les changements de va sont fréquents en **Statistique** : **transformation des données**, **stabilisation de la variance**, etc.

Ils servent aussi à transformer la **loi** d'une va dont l'étude est complexe en une nouvelle loi plus simple.

Un exemple avec plusieurs variables est celui où $y = \varphi(x)$, avec $x \in \mathbf{R}^S$ ($S > 2$) et où $\varphi : \mathbf{R}^S \mapsto \mathbf{R}$ est définie à l'aide de **coordonnées polaires** :

$$
\begin{aligned}
& x_1 = y^{1/2} \cos\omega_1 \ldots \cos\omega_{S-2} \cos\omega_{S-1}\ , \\
& \ldots \\
(14)\quad & x_s = y^{1/2} \cos\omega_1 \ldots \cos\omega_{S-s} \sin\omega_{S-s+1}\ , \quad \forall\ s \in \{2,\ldots, S-1\}, \\
& \ldots \\
& x_S = y^{1/2} \sin\omega_1\ ,
\end{aligned}
$$

dont le **jacobien** est :

(15) $\text{Dét}(D\,x / D\,z) = \Pi_{s=1}^{S-2} \cos^{S-2-s+1} \omega_s$,

avec $x = (x_1, \ldots, x_S)$ et $z = (y, \omega_1, \ldots, \omega_{S-1})$.

(v) Dans le cas où ξ est scalaire (S = 1), des changements de variable usuels sont les suivants (cf **fonction simple**) :

(a) **fonction puissance** $x \mapsto y = \beta\ (x - \alpha)^p$, où $p \in \mathbf{R}_+^*$, dont la fonction « **racine carrée** » $x \mapsto y = \beta\ (x - \alpha)^{1/2}$. La **fonction polynômiale** en est une généralisation directe, de même que les **fractions rationnelles** (rapports de polynômes) ;

(b) **fonction logarithme** (népérien) $x \mapsto y = \beta\ .\ \mathrm{Log}\ (x - \alpha)$, ou la **fonction exponentielle** $x \mapsto y = \beta\ e^{\gamma\ (x - \alpha)}$;

(c) **fonction Arc sinus** $x \mapsto y = \beta\ \mathrm{Arc\ sin}\ (x - \alpha)$.