CHANGEMENT DE VARIABLE DANS LES INTÉGRALES (A5, C2)
(23 / 03 / 2020,)

Le **changement de variable dans une intégrale** est un procédé fréquemment utilisé pour définir de nouvelles **lp** à partir de **lois** données.

(i) Etant donné l'**espace mesuré** ($\mathbf{R}^n$, $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, dx), où dx est la **mesure de LEBESGUE** λ_n , on considère deux **ouverts** U et V de $\mathbf{R}^n$ (cf **topologie**) et une fonction f : $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{C}$ définie dx-p.p. dans U et intégrable dans U. On suppose donné un C^1-**difféomorphisme** φ : V $\mapsto$ U tq x = φ (y) dont le **jacobien** :

(1) $J(y) = |D x / D y|$

est différent de zéro dans V.

Alors, la fonction :

(2) $g : y \mapsto g(y) = (f(\varphi(y))) \,.\, \mathrm{abs}\, J(y) = (f \circ \varphi(y)) \,.\, \mathrm{abs}\, J(y)$

est dx-intégrable dans V et (cf **théorème de transfert des mesures**) :

(3) $\int_U f(x)\, dx = \int_V f(\varphi(y)) \,.\, \mathrm{abs}\, J(y)\, dy = \int_V g(y)\, dy.$

Le symbole abs désigne la valeur absolue.

(ii) On peut, dans ce qui précède, définir le changement de variable inverse selon $y = \psi(x)$, avec $\psi = \varphi^{-1}$.