CLASSIFICATION DES PROCESSUS (N2)
(05 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Un **processus stochastique** peut être classé en fonction de ses particularités. Plusieurs types de classements peuvent être distingués :

(a) selon la nature de son **ensemble des temps** T : processus en temps continu, processus en temps discret, processus en temps « mesuré », etc ;

(b) d'après la nature de son **espace d'états** ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$). Ainsi, $\mathscr{X}$ peut être (au plus) dénombrable (cf **chaîne de MARKOV**) ou non : dans le premier cas, on parle d'**espace d'états discret** ; dans le second, d'**espace d'états continu** (ie il existe K $\in$ **N*** tq $\mathscr{X} \subset \mathbf{R}^K$). On parle aussi d'**espace d'états fonctionnel** ou d'**espace d'états abstrait** (dans le cas général) ;

(c) d'après la **loi sous-jacente du processus** : un processus X prend souvent le nom de la loi P^X qui le caractérise, nom qui n'est autre que le nom commun à ses projections finies : **processus gaussien**, **processus de POISSON**, etc ;

(d) d'après certaines **propriétés spécifiques** (cf aussi (b) et (c) supra) : **processus stationnaire**, **processus ergodique** (cf **ergodicité**), **processus cadlag** (ie à trajectoires continues à droite et limitées à gauche), **processus à accroissements indépendants** (resp **processus à accroissements orthogonaux**), **processus purement aléatoire** (cf **échantillon indépendant**, **suite indépendante**), **martingale**, **processus de MARKOV**.

(ii) Les processus $X = (X_t)_{t \in T}$ en temps discret T = **N** et à espace d'états discret $\mathscr{X}$ peuvent avoir des propriétés particulières, dont les suivantes :

(a) X est un **processus indépendant**, ou un **processus à va indépendantes**, ssi, $\forall$ t $\in$ T :

(1) $\quad P([X_t = x_t]] / [X_{t-1} = x_{t-1}] \cap \ldots \cap [X_0 = x_0]) = P([X_t = x_t]),$

pour tout $\{x_0, \ldots, x_t\} \subset \mathscr{X}$ et tout t $\in$ **N*** ;

(b) X est un **processus (temporellement) stationnaire** ssi sa loi P^X ne dépend pas des translations effectuées sur T, ie (lois, ou projections, finies de P^X invariantes par translation du temps) :

(2) $\quad P([X_t = x_t] \cap [X_{t-1} = x_{t-1}] \cap \ldots \cap [X_0 = x_0]) = P([X_{t+h} = x_t] \cap [X_{t+h-1} = x_{t-1}] \cap \ldots \cap [X_h = x_0]),$

pour tout $\{x_0, \ldots, x_t\} \subset \mathscr{X}$, tout t $\in$ **N*** et tout h $\in$ **N*** ;

(c) X est une **martingale** ssi :

(3) $\quad E(X_t / [X_{t-1} = x_{t-1}] \cap \ldots \cap [X_0 = x_0]) = x_{t-1},$

pour tout $\{x_0 ,..., x_t\} \subset \mathscr{X}$ et tout $t \in \mathbf{N}^*$;

(d) X est un **processus de A.A. MARKOV**, ou un **processus markovien**, ssi (processus à mémoire courte) :

(4) $P ([X_t = x_t]] / [X_{t-1} = x_{t-1}] \cap ... \cap [X_0 = x_0]) = P ([X_t = x_t] / [X_{t-1} = x_{t-1}]),$

pour tout $\{x_0 ,..., x_t\} \subset \mathscr{X}$ et tout $t \in \mathbf{N}^*$.

D'après (4), un processus de MARKOV se définit aussi par la donnée d'une **loi initiale** $p (x_0) = P ([X_0 = x_0])$ et des **probabilités de transition** $P_{x(t)x(t-1)} = P([X_t = x_t] / [X_{t-1} = x_{t-1}])$ (en notant aussi $x(t)$ pour x_t). Lorsque ces dernières ne dépendent pas de t, on dit que X est un **processus avec probabilités de transition stationnaires** (temporellement) (**stationnarité** stricte). D'après (3), une martingale vérifie $E X_0 = E X_1 = ... = E X_{t-1}$, pour tout $t \in \mathbf{N}^*$.

(iii) Les processus X en temps continu T = **R** et à espace d'états discret $\mathscr{X}$ admettent les définitions particulières suivantes (où les X (t) désignent les X_t) :

(a) X est un **processus à accroissements indépendants** ssi les va :

(5) $X (t_1) - X (t_0), \quad X (t_2) - X (t_1) \quad ,..., \quad X (t_N) - X (t_{N-1})$

sont indépendantes, pour tout $\{t_0 ,..., t_N\} \subset T$ tq $t_0 < ... < t_N$ et pour tout $N \in \mathbf{N}^*$;

(b) X est un **processus (temporellement) stationnaire** ssi :

(6) $P ([X(t_N) = x_N] \cap ... \cap [X(t_0) = x_0]) = P ([X(t_N + h) = x_N] \cap ... \cap [X(t_0 + h) = x_0]),$

pour tout $\{t_0 ,..., t_N\} \subset T$ tq $t_0 < ... < t_N$, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, pour tout $\{x_0 ,..., x_N\} \subset \mathscr{X}$ et pour tout $h \in \mathbf{R}_+^*$;

(c) X est une **martingale** ssi :

(7) $E (X(t_N) / [X(t_{N-1}) = x_{N-1}] \cap ... \cap [X(t_0) = x_0]) = x_{N-1}$,

pour tout $\{t_0 ,..., t_N\} \subset T$ tq $t_0 < ... < t_N$, pour tout $\{x_0 ,..., x_N\} \subset \mathscr{X}$ et pour tout $N \in \mathbf{N}^*$;

(d) X est un **processus de A.A. MARKOV** ssi :

(8) $P ([X(t_N) = x_N] / [X(t_{N-1}) = x_{N-1}] \cap ... \cap [X(t_0) = x_0]) = P ([X(t_N) = x_N] / [X(t_{N-1}) = x_{N-1}]),$

$\forall \{t_0 ,..., t_N \} \subset T$ tq $t_0 < ... < t_N$, $\forall \{x_0 ,..., x_N\} \subset \mathscr{X}$ et $\forall N \in \mathbf{N}^*$.

D'après (5), si X est à accroissements indépendants et si la loi de la **va** (accroissement) $D_{st} = X_t - X_s$ ne dépend que de $|t - s|$, on dit, conformément à (6), que X est un **processus à accroissements stationnaires**, ie (en notant X(t) pour X_t) :

(9) $\mathscr{L}(D_{st}) = \mathscr{L}(X_t - X_s) = P^{X(t) - X(s)} = P_{t-s}, \quad \forall (s, t) \in T_<^2.$

(iv) Enfin, on définit des classes de processus particuliers à partir d'équations dans l'espace des états ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) : eg **processus autorégressif** (ou ar), **processus de moyenne mobile** (ou mm), **processus autorégressif de moyenne mobile** (ou armm), processus armm intégré (ou armmi), processus armmi saisonnier (ou armmis), etc. On peut aussi en définir à partir d'équations dans l'espace des **fréquences** ou dans l' « espace » des **temps** (ou « paramètres »).