COALITION (C14)
(02 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion (à connotation militaire) de **coalition** est importante en **théorie des jeux** à plusieurs personnes (J. von NEUMANN - O. MORGENSTERN).

Soit J un ensemble de joueurs tq Card J = n ≥ 3 (le cas où n = 2 relève de la théorie des **jeux à deux personnes**, aussi appelés **duels**).

On appelle **coalition** toute partie $C \in \mathscr{P}(J)$ (par extension, ∅ est parfois aussi considérée comme une coalition). Le problème de chaque joueur $j \in J$ consiste à trouver la meilleure façon de gagner (au sens d'un **gain** individuel maximum) : ceci le conduit à chercher un (ou plusieurs) **allié(s)** tq la coalition C ainsi formée obtienne un gain maximum. Cet objectif soulève plusieurs questions.

(i) **Répartition des gains** x_j ($j \in J$) entre joueurs afin de garantir un maximum de gain pour un joueur (ou pour une coalition de joueurs). On souhaite aussi que le gain d'une coalition soit supérieur au total des gains que les joueurs de cette coalition pourraient espérer en jouant seuls ou dans d'autres coalitions.

Soit A_j l'ensemble des **actions** ou **stratégies** du joueur j et $u_j : A_j \mapsto \mathbf{R}$ sa **fonction d'utilité**. On note symboliquement $A^C = \cup_{c \in C} A_c$ toute coalition (y compris J elle-même) et $x = (x_j)_{j \in J}$ une **imputation** entre les joueurs, ie une **suite** constituée des gains (nets) individuels $x_j \in \mathbf{R}$.

On définit une **fonction de gain de coalition**, ie une **fonction d'ensembles** $g : \mathscr{P}(J) \mapsto \mathbf{R}$ tq :

$$g(\varnothing) = 0,$$

(1)

$$\forall (C', C'') \in (\mathscr{P}(J))^2 \text{ tq } C' \cap C'' = \varnothing, \text{ on a } g(C') + g(C'') \geq g(C' \cup C'')$$
(**propriété de suradditivité**).

Par suite :

(a) on dit que $u^\# = (u_j^\#)_{j \in J}$ est une **suite réalisable** ssi il existe $a \in A^J$ tq, à la fois :

$$u_j^\# \leq u_j(a^\#), \qquad \forall j \in J,$$

(1)

$$\exists^c j \in J \text{ tq } : \forall b \in A^{J \setminus \{j\}}, \exists a_j \in A_j \text{ tq } u_j(a_j, b) > u_j^\#,$$

où $\exists^c$ signifie « il n'existe pas ».

Autrement dit, $u^\#$ est réalisable par l'ensemble de la coalition J mais aucun joueur j ne peut améliorer $u_j^\#$ en jouant de façon « optimiste », ie en croyant pouvoir contrecarrer toute stratégie de l'ensemble J \ { j } des autres joueurs ;

(b) on appelle **(solution d') équilibre de J.F. NASH** tout élément $a^{\#} \in A^J$ vérifiant la propriété suivante :

(2) $\exists^c\, j \in J$ tq : $\exists\, a_i^{\#} \in A_i$ tq : $u_i\,(a_i\,,\, b_i^{\#}) > u_i\,(a^{\#})$,où $b_i^{\#} \in A^{J \setminus \{j\}}$.

Autrement dit, les joueurs $j \in J$ jouent de façon non coopérative et « passive » ;

(c) on appelle **(solution d') équilibre « fort »** du jeu tout élément $a^{\#} \in A^J$ vérifiant la propriété suivante :

(3) $\exists^c\, C \in \mathscr{P}(J) \setminus \varnothing$ tq : $\exists\, a_C \in A^C$ tq : $u_j\,(a_c\,,\, b_{J \setminus C}^{\#}) > u_j\,(a^{\#}),\ \forall\, c \in C$,

où $b_{J \setminus C} = \Pi_{i \in J \setminus C}\, A_i$. Autrement dit, les joueurs jouent de façon coopérative et passive ;

(d) on dit que C est une **coalition effective** pour une imputation x ssi :

(4) $\Sigma_{c \in C}\, x_c \leq g\,(C)$.

Autrement dit, C gagne au moins autant que l'ensemble de ses membres. Si C est une **coalition effective** pour x, on dit que x **domine** une autre imputation $y \neq x$ (et l'on note $x \succ y$) ssi :

(5) $x_c > y_c\,,\ \forall\, c \in C$.

(e) On appelle **solution de J. von NEUMANN** un ensemble X d'imputations tq (e_1) il n'existe pas d'imputation $y \in X$ qui soit dominée par une imputation $x \in X$ et que (e_2) $\forall\, y \notin X,\ \exists\, x \in X$ tq $x \succ y$. Une telle solution consiste en un ensemble d'imputations préférables à d'autres, mais ne fournit donc pas de coalition préférable à d'autres (ie indique comment partager les gains mais non comment se coaliser).

(ii) Pour résoudre cette difficulté, des définitions ont été avancées. Ainsi, soit Π_1 une partition de J, appelée **structure de coalition**, $\Pi(J)$ l'ensemble de partitions de J et $\mathscr{P}(\Pi\,(J))$ l'ensemble des parties de $\Pi\,(J)$. Si l'on peut définir une règle $\psi : \Pi(J) \mapsto \mathscr{P}(\Pi\,(J))$ de changement de structure admissible, laquelle associe à une partition Π_1 un ensemble de partitions $\Pi_2 \in \Pi(J)$, on appelle **ψ-stabilité (au sens) de R.D. LUCE** un couple (x, Π_1) tq les joueurs ne préfèrent pas d'autre situations décrites par le couple $(x, \psi\,(\Pi_1))$. Autrement dit, (x, Π_1) est ψ-stable au sens de LUCE ssi :

(a) toute coalition C qui pourrait être obtenue à partir de ψ et Π_1 ne pourrait être meilleure pour les joueurs, ie :

(6) $g\,(C) \leq \Sigma_{c \in C}\, x_c\,,\quad \forall\, C \in \psi\,(\Pi_1)$;

(b) si un joueur j ne gagne pas plus par coalition que par isolement (ie si $x_i > g\,(\{j\})$), alors j a intérêt à rester isolé, ie :

(7) $x_i = g\,(\{j\}) \Rightarrow \{j\} \in \Pi_1$.

Si elle permet des négociations entre joueurs portant sur les imputations x, cette définition nécessite cependant la connaissance de la règle ψ.

(iii) L'intérêt, pour un un joueur, de sa **participation au jeu**, les règles du jeu étant connues. Dans l'affirmative, l'évaluation de sa **probabilité** de figurer dans une coalition « intéressante ».

Si une coalition C constituée de k joueurs (Card C = k $\leq$ n) est nécessaire pour gagner, l'ensemble de telles coalitions peut être construit par des **permutations** de J tq les k premiers joueurs forment des coalitions gagnantes minimales (ie qui ne sont plus gagnantes si on leur retire le joueur n° k, appelé **pivot** de la coalition C). Si un joueur j est n_j fois un pivot, sa probabilité de figurer en **position pivotale** est $p_j = n_j / n!$, nombre parfois appelé **valeur de L.S. SHAPLEY - M. SHUBIK**.

(iv) La **conception d'une méthode de choix des partenaires**, ie du procédé de sélection des autres joueurs d'une coalition. Le **principe de taille minimale** (W.A. GAMSON - W.H. RIKER) exprime que, dans un jeu à **information** parfaite, chaque joueur préfère les coalitions gagnantes C les plus petites : si Card C = k, on appelle k la **taille gagnante minimale**.

(v) Certaines théories allouent des « **poids** » aux joueurs (ie des **distributions** de masse sur J, ou sur chaque coalition C) afin de déterminer des **« positions de jeu »** cruciales pour certains d'entre eux.