

COEFFICIENT DE MORAN (D2, D3, F3, I)

(18 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $p > 1$, $N > 1$, $A \subset \mathbf{R}^p$ une **partie** non vide connexe (cf **espace connexe**) et une **partition** finie $\Pi_A = \{A_1, \dots, A_N\}$ de A formée de parties connexes, munie de la notion de **contiguïté spatiale**. Soit, d'autre part, $X \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}^N}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **vecteur aléatoire** (ou **N-échantillon**) (où $\mathbf{R}^N$ désigne $\mathbf{R}^N$). On associe à chaque partie $A_n \in \Pi_A$ la coordonnée $X_n = \text{pr}_n X$ de X .

On appelle alors **coefficient (d'autocorrélation spatiale) de P.A.P. MORAN** la **statistique** définie par le rapport des **formes quadratiques** suivant :

$$(1) \quad M_N = (2a)^{-1} N \cdot (X' P X)^{-1} (X' P C P X),$$

où $C = C(1)$ est la matrice de contiguïté d'ordre 1 associée à Π_A , P la **matrice de centrage par rapport à la moyenne** $\bar{X}_N$ et $a = a(1)$ le nombre total de parties contigües d'ordre 1.

Ce coefficient est aussi appelé **coefficient d'autocorrélation instantanée**, notamment lorsque les observations sont faites en **coupe instantanée** (eg modèle sur coupe instantanée). On note que M_N peut être négatif (ie $M_N \in \mathbf{R}$).

(ii) Une généralisation du coefficient de MORAN est le **coefficient d'autocorrélation spatiale d'ordre k**, ou **coefficient d'autocorrélation instantanée d'ordre k**, (au sens de L. LEBART) :

$$(2) \quad M_N(k) = \{2a(k)\}^{-1} \cdot N (X' P X)^{-1} \{X' P C(k) P X\}, \quad \forall k \in \{2, \dots, N-1\},$$

où $C(k)$ représente la matrice de contiguïté d'ordre k et $a(k)$ le nombre de parties contigües d'ordre k .

On appelle alors **corrélogramme spatial**, ou **corrélogramme instantané**, le graphe de la fonction : $k \in \{2, \dots, N-1\} \mapsto M_N(k) \in \mathbf{R}$.

(iii) Une autre généralisation consiste à remplacer les matrices de contiguïté $C(k)$ par des matrices $W(k)$ à éléments positifs, non nécessairement symétriques, dans (1).

On obtient alors le **coefficient de A.D. CLIFF - J.K. ORD** :

$$(3) \quad M_N(k) = \{b(k)\}^{-1} N \cdot (X' P X)^{-1} \{X' P W(k) P X\},$$

avec $b(k) = e_N' W(k) e_N - \text{Tr } W(k)$.

Par suite :

(a) si $M_N = 0$, il n'y a pas d'autocorrélation spatiale (d'ordre 1).

(b) si $M_N > 0$, il existe une autocorrélation spatiale positive d'ordre 1 : en effet, les grandes valeurs des coordonnées X_n de X correspondent alors plutôt à des parties contigües ;

(c) si $M_N < 0$, il existe une autocorrélation spatiale négative d'ordre 1 : en effet, les petites valeurs des coordonnées X_n de X correspondent alors plutôt à des parties contigües.

(iv) Pour tester l'**hypothèse statistique** H_0 d'absence d'autocorrélation spatiale contre l'hypothèse H_1^+ de présence d'autocorrélation spatiale positive, on admet souvent l'hypothèse de **normalité** $X \sim \mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$.

Par suite, si H_0 est vraie :

$$(4) \quad \begin{aligned} E_0 M_N &= -(N-1)^{-1}, \\ V_0 M_N &= (N-1)^{-1}(N+1)^{-1} b^{-2} (N^2 A - N B + 3 b^2), \end{aligned}$$

où $E_0 M_N$ est l'espérance de M_N calculée sous l'hypothèse H_0 , $V_0 M_N$ est la **variance** de M_N sous cette même hypothèse, et :

$$(5) \quad \begin{aligned} A &= (1/2) \cdot \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (w_{\alpha\beta} + w_{\beta\alpha})^2 \quad (\text{avec } \beta \neq \alpha), \\ B &= \sum_{n=1}^N (w_{n\cdot} + w_{\cdot n})^2, \\ W &= W(1) = (w_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)}, \\ b &= b(1). \end{aligned}$$

Par suite, sous des conditions générales relatives à W , on montre que :

$$(6) \quad \mathcal{L} \{(M_N - E_0 M_N) / \sigma_0(M_N)\} \xrightarrow{H_0}_{N \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(0, 1) \text{ (loi normale réduite),}$$

avec $(\sigma_0(M_N))^2 = V_0 M_N$ (**variance** de M_N calculée sous l'hypothèse H_0). Cette propriété fournit une **région critique** asymptotique associée à un **risque de première espèce** $\alpha \in]0, 1[$ (cf **région de confiance asymptotique**) :

$$(7) \quad w_N = \{\omega \in \Omega : (M_N(\omega) - E_0 M_N) / \sigma_0(M_N) > q_{1-\alpha}\},$$

où $q_{1-\alpha}$ est le **quantile** d'ordre $1 - \alpha$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Il existe un test analogue contre l'alternative H_1^- (existence d'une autocorrélation négative).