COÏNTÉGRATION (N2, N12)
(20 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie des processus** comporte, notamment, l'étude probabiliste des **processus** : elle analyse ainsi, parmi les processus les plus simples, les **processus stationnaires** (cf **stationnarité**).

Elle a été étendue à l'analyse de **processus non stationnaires** (cf aussi **intégration**).

Or, un **modèle** faisant intéragir entre eux des processus non stationnaires implique souvent l'existence d'une propriété reliant ces processus : cette propriété définit le concept de **coïntégration** entre processus (C.W.J. GRANGER - A.A. WEISS - R.F. ENGLE - S. JOHANSEN).

La **relation de coïntégration** doit donc être prise en compte dans les **procédures statistiques** concernées par ces processus (estimation, tests, prévision). Elle intervient donc essentiellement dans le cadre général des **modèles dynamiques** (cf eg **modèle d'interdépendance dynamique**).

(i) De façon générale, deux processus sont coïntégrés (d'ordre 1) ssi il existe une fonction reliant ces processus qui définit elle-même un processus stationnaire. La notion de coïntégration dépend donc :

(a) du **type de stationnarité** $\mathcal{S}$ considéré ;

(b) du **type de relation** reliant les variables de ces processus : il s'agit, très généralement, d'une combinaison linéaire (ou d'une **forme linéaire**) associant ces variables.

(ii) On considère un processus réel scalaire $X = (X_t)_{t \in T}$, à valeurs dans l'**espace d'état** $\mathcal{X}$ = **R** et en **temps** discret (eg T = **Z**), ainsi que la notion de stationnarité $\mathcal{S}$ suivante.

On dit que :

(a) X est un **processus intégré d'ordre 0**, ou encore un processus stationnaire au second ordre (cf **processus stationnaire d'ordre p**, **processus stationnaire en covariance**) ssi :

$$(1) \quad \begin{cases} E\, X_t = \mu \text{ (espérance indépendante de t)}, \\ V\, X_t = \sigma^2 < +\infty \text{ (variance finie et indépendante de t)}. \end{cases}$$

(b) X est un **processus intégré d'ordre d** $\in$ **N*** ssi le processus différentié $\Delta^d X = (\Delta^d X_t)_{t \in T}$ est lui-même stationnaire au sens de $\mathcal{S}$. On note alors $X \in \mathcal{I}(d)$ (X appartient à la classe des processus intégrés d'ordre d).

Ainsi :

(a) le processus de **bruit blanc** U tq $E\,U_t = 0$ et $V\,U_t = \sigma^2$, $\forall\, t \in T$, est $\mathcal{S}$-stationnaire ;

(b) la **promenade aléatoire** élémentaire X tq $X_t = X_{t-1} + U_t$, dans laquelle $U = (U_t)_{t \in T}$ est un bruit blanc, $E\,X_0 = 0$ et $V\,X_t = t\,.\,\sigma^2$, $\forall\, t \in T$, est un processus $\mathcal{I}(1)$ (cf **processus autorégressif**) ;

(c) un **processus autorégressif de moyenne mobile intégré** structurel d'ordre (p, d, q) est intégré d'ordre d.

(iii) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un **processus vectoriel** (ie multivarié) réel à valeurs dans l'espace d'état $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ et $\mathcal{S}$ la notion de stationnarité précédente.

On note $X^k = (X_{kt})_{t \in T}$ un **processus composant**, ou **variable composante**, de X, ie la « coordonnée » d'**indice** $k \in N_K^*$ de X.

On dit que X est un **processus intégré d'ordre (d, c)** $\in (\mathbf{N}^*)^2$, ou un **processus coïntégré d'ordre (d, c)**, ssi :

(a) toutes ses coordonnées X^k sont intégrées d'ordre d, ie $X^k \in \mathcal{I}(d)$, $\forall$ $k \in N_K^*$;

(b) il existe une forme linéaire h tq le processus réel scalaire $h'\,X_t$ est intégré d'ordre $c - d \geq 0$.

On peut noter cette propriété $X \in \mathcal{CI}(d, c)$.

En particulier, lorque $c - d = 0$, $h'\,X_t$ est $\mathcal{S}$-stationnaire.

(iv) On établit que, si X est (d,c)-coïntégré, il n'existe pas de **représentation moyenne mobile** inversible de X. Par suite, X ne possède pas de représentation auto-régressive vectorielle : en effet, l'existence d'une telle représentation impliquerait qu'aucune forme linéaire $h'\,X_t$ ne serait stationnaire.

Cependant, un **théorème de C.W.J. GRANGER** permet une représentation de deux processus X et Y coïntégrés $\mathcal{CI}(1,1)$. En effet, le couple (X, Y) peut s'exprimer sous la forme d'un **modèle à correction d'erreur** d'équation :

(1) $\Delta Y_t = \alpha\,(Y_{t-1} - \gamma\,X_{t-1}) + \beta\,(X_t - X_{t-1}) + E_t\,, \qquad \forall\, t \in T,$

dans laquelle (α, β, γ) est un **paramètre d'intérêt** et $E = (E_t)_{t \in T}$ une **perturbation** stationnaire.