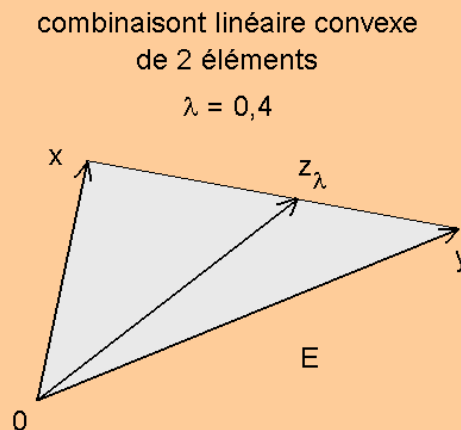


COMBINAISON LINÉAIRE CONVEXE (A3, A11, C8)

(24 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit E un **espace vectoriel** réel, $\lambda \in [0, 1]$ et $(x, y) \in E^2$. On appelle **combinaison linéaire convexe** de x et y de rapport λ le vecteur (cf graphique ci-dessous) :

$$(1) \quad z_\lambda = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y.$$



(ii) Il est équivalent de dire qu'il existe deux scalaires $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ tq $\alpha + \beta = 1$ et que :

$$(1)' \quad z_{\alpha\beta} = \alpha \cdot x + \beta \cdot y.$$

Plus généralement, si $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ est une **suite** finie de vecteurs de E et $\lambda = (\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite finie de scalaires réels tq $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0, \forall i=1,\dots,n$, on appelle **combinaison linéaire convexe** de x selon λ le vecteur :

$$(2) \quad z_\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i,$$

avec $\lambda \in S_n$ (**simplexe** de $\mathbf{R}^n$).

La formule (2) peut encore s'étendre :

(a) à une suite dénombrable $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de E :

$$(3) \quad z_\lambda = \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n x_n, \quad \text{où } \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda_n = 1 \text{ et } \lambda_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N},$$

avec $\lambda \in S_{\mathbf{N}}$ (« simplexe » de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$) ;

(b) à une fonction quelconque $\theta \mapsto x(\theta)$, avec :

$$(4) \quad z_\lambda = \int \lambda(\theta) \cdot x(\theta) d\mu(\theta),$$

où $\theta \in \Theta$ (ensemble donné), μ est une mesure positive donné, et $\theta \mapsto \lambda(\theta)$ est une fonction non négative (ie $\lambda \geq 0$) et tq $\int \lambda(\theta) d\mu(\theta) = 1$ (cf **densité de probabilité**, **fonction de poids**).

(iii) Cette notion se retrouve dans de nombreux contextes (cf aussi **noyau stochastique** et **probabilité de transition**) :

- (a) **parties convexes** et **optimisation** ;
- (b) **simplexe** et **lois de probabilité** ;
- (c) **mélange de lois**.