COMPACITÉ RELATIVE (A5, B)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{O})$ un **espace métrique** muni de la **famille** $\mathcal{O}$ de ses **ouverts**. Soit $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{O})$ la **tribu borélienne** associée à $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ une famille de **probabilités** définies sur $\mathcal{T}$. D'où la **représentation statistique** « fondamentale » usuelle $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$.

On dit que $\mathcal{P}$ est une **famille (de probabilités) relativement compacte** sur $\mathcal{T}$ ssi toute **suite** $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ contient une suite extraite qui est faiblement convergente (cf **convergence faible**).

La limite de cette suite peut ne pas se trouver dans $\mathcal{P}$.

(ii) La notion se transpose directement au cas d'un espace « image » $(\mathcal{X}, \mathcal{Q})$ (eg **espace d'observation**), dans lequel $\mathcal{Q}$ désigne une **topologie** sur $\mathcal{X}$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{Q})$ la tribu de BOREL associée à $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}^{\xi}$ une famille de **lois de probabilité**, elles-mêmes images de la famille $\mathcal{P}$ précédente par une **variable aléatoire** $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.