COMPACTIFIÉ DE ALEXANDROV (A4)

La notion de **compactification d'ALEXANDROV** permet de définir un **espace compact** à partir d'un **espace topologique** qui n'est que localement compact.

(i) Soit (E, $\mathcal{O}$) un **espace localement compact**.

On montre que l'ensemble :

(1) $E^{\wedge} = \{x_\infty\} \cup E$,

muni de la **topologie** $\mathcal{O}^{\wedge}$ formée par :

(a) l'ensemble $\mathcal{O}$ des **parties ouvertes** de E (topologie de E) ;

et (b) la réunion d'un ensemble noté $\{x_\infty\}$ (singleton, de cardinalité 1) avec les complémentaires (dans $E^{\wedge}$) des parties compactes de E (cf **espace compact**),

est un ensemble (espace) compact, appelé **compactifié de P.S. ALEXANDROV** de E.

Autrement dit, $\mathcal{O}^{\wedge} = \mathcal{O} \cup \mathcal{G}$, avec $\mathcal{G} = \{x_\infty\} \cup \{G \subset E^{\wedge} : G = E^{\wedge} \setminus K, \forall K \in \mathcal{K}(E)\}$, où $\mathcal{K}(E)$ désigne la classe des parties compactes de E.

Le point x_∞ , parfois noté ω, est appelé **point à l'infini** de E.

(ii) Ainsi, si E = **N** (muni de la topologie discrète), on note $\bar{\mathbf{N}}$ son compactifié de ALEXANDROV (avec ici $x_\infty = +\infty$).