CONCENTRATION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE (C5)
(25 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

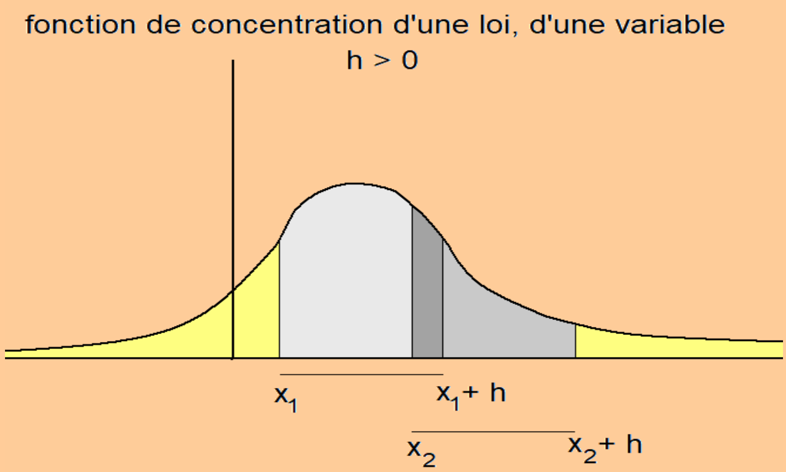
La **(fonction de) concentration** d'une **variable aléatoire**, ou de sa **loi de probabilité**, représente la plus grande **probabilité** d'un intervalle de longueur donnée (cas scalaire).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** et $h > 0$ un réel positif.

On appelle **(fonction de) concentration (au sens de P.P. LÉVY)** de ξ (ou de sa **loi** P^{ξ}, ou encore de sa **fr** F) la fonction $C_{\xi} : \mathbf{R}_{+} \mapsto [0, 1]$ définie par :

(1) $$C_{\xi}(h) = \sup_{x \in \mathbf{R}} P([x \leq \xi \leq x + h]) = \sup_{x \in \mathbf{R}} P([0 \leq |\xi - x| \leq h]).$$

F est continue ssi $C_{\xi}(0) = 0$.



(ii) Si ξ et η sont des vars indépendantes, on a (concentration d'une somme de **va**) :

(2) $$C_{\xi + \eta} \leq \inf(C_{\xi}, C_{\eta}).$$

(iii) La concentration d'une va se généralise à plusieurs dimensions. Lorsque ξ est à valeurs dans un **espace de BANACH** $(B, ||.||)$ et si $h \in \mathbf{R}_{+}^{*}$ est donné, la **fonction de concentration** est définie selon :

(1)' $$C\,\xi(h) = \sup_{x \in B} P([||\xi - x|| \leq h]).$$

(iv) Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un **espace probabilisé**, $\mathcal{X}$ un **espace vectoriel** réel de dimension finie, $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des **parties convexes** non vides de $\mathcal{X}$ qui sont symétriques pr à l'origine (ie $\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C}(X) : -C = C\}$), ξ et $\eta : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ deux **va** données, on dit que ξ (resp P^{ξ}) est **plus concentrée autour de l'origine** que η (resp P^{η}) ssi :

(3) $P(\xi \in C) \geq P(\eta \in C), \quad \forall C \in \mathcal{C}_0$.

(v) La notion de concentration actuelle peut se rapprocher de celle de **région de confiance la plus précise** : une **région de confiance** (ou une **partie centrale** d'une loi) peut avoir une « faible » probabilité de recouvrement mais un « grand » **volume** (cas d'une loi dispersée) (cf **dispersion**, **variabilité**) ou, au contraire, une « forte » probabilité mais un « petit » volume (cas des lois concentrées) (cf **concentration**).