CONVERGENCE EN MESURE (A5, E, F)
(05 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit (E, $\mathcal{A}$, μ) un **espace mesuré** doté d'une **mesure bornée** μ et $\mathcal{M}$(E, **R**) l'ensemble des **fonctions numériques** $\mathcal{A}$-mesurables de E dans **R** (cf **application mesurable**).

On dit qu'une **suite** f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{M}$(E, **R**) **converge en μ-mesure**, ou est une **suite μ-convergente**, vers une fonction $f_\infty \in \mathcal{M}$(E, **R**) lorsque n tend vers l'infini ssi :

(1) $\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N_{\varepsilon,\eta} \in \mathbf{N}$ tq : $n \geq N_{\varepsilon,\eta} \Rightarrow \mu(|f_n - f_\infty| > \varepsilon) < \eta$,

où $|f_n - f_\infty| > \varepsilon$ désigne l'**événement** $\{x \in E : |f_n(x) - f_\infty(x)| > \varepsilon\}$.

(ii) La définition précédente s'étend directement aux fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^K$ (la **valeur absolue** étant remplacée par une **norme** sur $\mathbf{R}^K$).

(iii) Si les fonctions considérées sont des **va** et si μ est une **mesure de probabilité** P sur $\mathcal{A}$, on définit la **convergence en probabilité**.

(iv) On établit que :

(a) la convergence μ-presque partout (cf **convergence presque partout**) implique (lorsque μ est bornée) la convergence en mesure ;

(b) la convergence uniforme sur E d'une suite f vers $f_\infty \in \mathcal{M}$ (E, **R**) implique la convergence en mesure de f vers f_∞ .