

CONVERGENCE EN PROBABILITÉ (E, F, N)

(23 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **convergence en probabilité** est un mode de **convergence stochastique** parmi les plus « faibles » pour des suites de **variables aléatoires** : ce type de convergence est en effet impliqué par la plupart des autres modes de **convergence stochastique**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **vars** $X_n : \Omega \mapsto \mathbf{R}$.

On dit que X **converge en probabilité**, ou que X **tend en probabilité**, vers la vars X_∞ lorsque n tend vers l'infini ssi :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N_{\varepsilon, \eta} \in \mathbf{N} \text{ tq } n \geq N_{\varepsilon, \eta} \Rightarrow P(|X_n - X_\infty| > \varepsilon) < \eta.$$

La va X_∞ est appelée **limite en probabilité**, ou **probabilité limite**, (notée $P\text{-lim}$ ou plim) de X .

On note la **convergence en probabilité** selon $X_n \xrightarrow{P} X_\infty$, ou $P\text{-lim}_n X_n = X_\infty$, ou $\text{plim}_n X_n = X_\infty$, ou encore $\text{st.lim } X_n = X_\infty$ (**limite stochastique**). En effet, on parle aussi parfois de **convergence stochastique** au sens (restreint) de « *convergence en probabilité* », au lieu du sens (plus large) de « *convergence des va selon un mode de convergence donné* ».

Enfin, par défaut, le terme de convergence, utilisé seul, désigne la convergence en probabilité : eg dans l'expression « **estimateur convergent** ».

Lorsque la convergence en probabilité n'est pas réalisée, on parle d'**inconvergence**.

(ii) Plus généralement, si les va X_n sont à valeurs dans $\mathbf{R}^K$ ($K > 1$) (cf **vecteur aléatoire**), on dit que X **converge en probabilité** vers X_∞ lorsque $n \rightarrow +\infty$, ssi (1) est vérifiée, où la **valeur absolue** $|\cdot|$ est remplacée par une **norme** (quelconque) $\|\cdot\|$ de $\mathbf{R}^K$.

(iii) On établit les propriétés suivantes :

(a) si $\text{plim } X_n = X_\infty$, alors, en notant F_n la **fr** de X_n ($\forall n \in \mathbf{N}$), F_∞ celle de X_∞ et $\mathcal{G}_\infty$ l'**ensemble de continuité** de F_∞ , on a $F_n \rightarrow F_\infty$ (**convergence simple**) sur $\mathcal{G}_\infty$;

(b) soit α une va P -presque certaine. Alors :

$$(2) \quad P\text{-lim}_n X_n = \alpha \Rightarrow F_n \rightarrow F_\alpha,$$

où $F_\alpha = \mathbf{1}(C)$, avec $C = \prod_{k=1}^K]c_k, +\infty[$ (cf **fonction indicatrice**), et :

$$(3) \quad P\text{-lim}_n X_n = \alpha \Leftrightarrow P^{X(n)} \xrightarrow{\text{ét.}} \delta_\alpha \text{ (loi de DIRAC au point } \alpha \in \mathbf{R}^K),$$

où $X(n)$ désigne (par commodité) X_n .

(iv) La convergence en probabilité s'étend à des espaces plus généraux que $\mathbf{R}^K$:

(a) soit (E, d) un **espace métrique** muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}_E$ et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de va $X_n : \Omega \mapsto E$. On dit que X **converge en probabilité** vers la va $X_\infty : \Omega \mapsto E$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ ssi :

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(d(X_n, X_\infty) > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,$$

ie ssi, :

$$(4)' \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N_{\varepsilon, \eta} \in \mathbf{N} \text{ tq } n \geq N_{\varepsilon, \eta} \Rightarrow P(d(X_n, X_\infty) > \varepsilon) < \eta ;$$

(b) soit $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ un **espace vectoriel normé**, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de va $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.

On dit que X **converge en probabilité** vers une va X_∞ (selon la **topologie** de la norme) ssi :

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\|X_n - X_\infty\| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

On dit que X converge en probabilité vers X_∞ (selon la **topologie faible** sur $\mathcal{X}$) ssi, pour tout $x' \in \mathcal{X}'$ (**dual topologique** de $\mathcal{X}$) :

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\langle x', X_n \rangle - \langle x', X_\infty \rangle| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

où $h \mapsto \langle h', h \rangle = h'(h)$, $\forall h' \in \mathcal{X}'$, désigne la **forme linéaire** canonique sur $\mathcal{X}$.