CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT (A5)

(i) Soit (E, $\mathcal{A}$, μ) un **espace mesuré** et f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ (droite numérique achevée).

On dit que f **converge μ-presque partout**, ou **converge presque partout (pour μ)**, lorsque n $\rightarrow$ + ∞ ssi :

(1) $\lim_n \sup f_n = \lim_n \inf f_n$ (μ-p.p.).

On appelle **ensemble de convergence** de f l'ensemble des points de E sur lequel elle converge simplement, ie (cf **convergence simple**) :

(2) $\mathcal{C}(f) = \{x \in E : \lim_n \sup f_n = \lim_n \inf f_n\}$.

$\mathcal{C}$ (f) est donc l'ensemble de définition de la limite (simple) $f_\infty = \lim_n f_n$ de la suite f.

(ii) En particulier, si (E, $\mathcal{A}$, μ) = (Ω, $\mathcal{T}$, P) (**espace probabilisé** fondamental) et si f est une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ notée X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et constituée de **va** $X_n : \Omega \mapsto \overline{\mathbf{R}}$, on parle de **convergence P-presque sûre**, ou de **convergence presque sûre (pour P)**, au lieu de convergence presque partout. On note alors $X_\infty = \lim_n X_n$ (P-p.s.).

(iii) Les notions précédentes s'étendent directement aux fonctions f_n et f_∞ vectorielles, réelles ou complexes, ou à valeurs matricielles.