

CONVERGENCE PRESQUE SÛRE (B, E)

(13 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **convergence presque partout** se traduit, en **calcul des probabilités**, par celle de **convergence presque sûre**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé** et $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une **suite** de **variables aléatoires** réelles (scalaires ou vectorielles).

On dit que X **converge P-presque sûrement**, ou **converge presque sûrement (pour P)**, vers une va réelle (de même type) X_∞ lorsque $n \rightarrow +\infty$ ssi la suite $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $X_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}^K$ converge simplement vers X_∞ sur (ie en tout point d') un ensemble $A = N^c \in \mathcal{T}$ tq $P(N) = 0$ (cf **convergence simple**). Autrement dit :

$$(1) \quad X_n(\omega) \rightarrow X_\infty(\omega), \quad \forall \omega \in A \text{ tq } P(A^c) = 0,$$

ou encore, en notant, selon le cas, $|\cdot|$ la **valeur absolue** ou la **norme** :

$$(2) \quad P(\lim_n |X_n - X_\infty| = 0) = 1.$$

On note $X_n \rightarrow^{P\text{-p.s.}} X_\infty$, ou $X_n \xrightarrow{P\text{-p.s.}} X_\infty$, ou $X_n \rightarrow X_\infty$ (P-p.s.).

On dit, de façon équivalente, que X tend **presque sûrement** vers X_∞ ssi l'**ensemble de convergence** $\mathcal{G}_X$ de cette suite a pour probabilité l'unité :

$$(3) \quad P(\mathcal{G}_X) = P(\lim_n |X_n - X_\infty| = 0) = 1.$$

(ii) Soit $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'**événements** $A \in \mathcal{F}$.

On dit que A tend **presque sûrement** vers l'évènement $A_\infty \in \mathcal{F}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ ssi la suite des **fonctions indicatrices** des A_n tend (simplement) vers celle de A_∞ , ie :

$$(4) \quad \mathbf{1}(A_n) \rightarrow \mathbf{1}(A_\infty) \quad (\text{cf aussi } \textbf{variable indicatrice}).$$

On montre que :

(a) la suite X tend P-presque sûrement vers X_∞ ssi :

$$(5) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists N_{\varepsilon, \eta} \in \mathbb{N} \text{ tq : } n \geq N_{\varepsilon, \eta} \Rightarrow P(\sup_{m \geq n} \|X_m - X_\infty\| > \varepsilon) < \eta,$$

$\|\cdot\|$ désignant la valeur absolue ou la norme euclidienne selon que les va sont réelles scalaires ou vectorielles ;

(b) si $X_n \rightarrow X_\infty$ (P-p.s.), alors $P\text{-}\lim_n X_n = X_\infty$ (ie la convergence presque sûre entraîne la **convergence en probabilité**) ;

(c) s'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tq $\sum_n \in \mathbf{N} E |X_n|^\alpha < +\infty$, alors on a la convergence presque sûre $X_n \rightarrow X_\infty$ (P-p.s.).

(iii) Les définitions précédentes s'étendent directement à d'autres situations :

(a) si $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ est un **espace vectoriel normé** muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$ et si $\mathcal{X}'$ est son **dual topologique**, on dit que la suite $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de va $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ **converge P-presque sûrement** vers la va X_∞ (selon la **topologie** de la **norme**) ssi :

$$(6) \quad P(\lim_n \|X_n - X_\infty\| = 0) = 1 ;$$

(b) on peut aussi définir une convergence presque sûre selon la **topologie faible** sur $\mathcal{X}$ (cf **convergence en probabilité**). Ceci est possible eg lorsque $\mathcal{X}$ est un **espace vectoriel** (réel ou complexe) (eg un espace de **matrices**).