

COURBURE (A7)

(29 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion mathématique de **courbure** permet de préciser, localement ou globalement, la **forme** d'une courbe, d'une surface ou d'une variété différentielle. Elle peut donc intervenir en **Statistique** dans les questions non linéaires (cf eg **courbure d'un modèle, courbure d'un modèle de régression**).

(i) Soit $I \in \mathcal{I}(\mathbf{R})$ (intervalle réel) et $f: I \mapsto \mathbf{R}^Q$ une fonction vectorielle de classe C^2 définissant une courbe « paramétrée » (au sens de l'analyse mathématique) $\Gamma = \{(x, y = f(x)) \in I \times \mathbf{R}^Q\}$ dans $\mathbf{R}^Q$ (cf **classe d'une application**).

(a) si $Df \neq 0$, la **longueur d'un arc de courbe** est le nombre $s \in \mathbf{R}$ tq :

$$(1) \quad \|Df(s)\|^2 = 1,$$

où Df désigne la dérivée vectorielle de f et $u \mapsto \|u\|^2 = \sum_{q=1}^Q u_q^2$ désigne le carré de la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^Q$.

On peut alors « reparamétriser » Γ à l'aide de s ;

(b) on définit la **courbure (scalaire)** de Γ au point s (courbure ponctuelle, ou courbure locale) à l'aide de la dérivée seconde, selon :

$$(2) \quad c(s) = \|D^2 f(s)\|.$$

Autrement dit, le **cercle osculateur** de Γ au point s est un cercle de rayon $1 / c(s)$.

(ii) Si l'on décompose le vecteur $D^2 f(s)$ selon :

$$(3) \quad D^2 f(s) = t(s) + n(s),$$

où $t(s)$ (resp $n(s)$) est le **vecteur tangent** (resp le **vecteur normal**) à Γ au point s , la courbure scalaire de Γ au point s vaut :

$$(4) \quad c(s) = \|n(s)\| / \|Df(s)\|^2, \quad \text{ou} \quad c(s) = \|Df(s)\|^{-2} \cdot \|n(s)\|.$$

On peut alors définir directement la **courbure moyenne** d'un arc de courbe tq le précédent.

(ii) Des notions de courbure analogues peuvent être définies, plus généralement, pour une variété « régulière » (eg de classe C^p), en utilisant eg des courbes « décrites » sur une telle variété.

(iii) En **Statistique**, la notion de courbure se rencontre dans divers **contextes statistiques** (cf **linéaire, modèle non linéaire, non linéarité**), dont les suivants :

(a) **fonction de vraisemblance**. Cette fonction $(X, \theta) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^Q \mapsto L(X, \theta) = dP_\theta^X / d\mu$ s'associe à un **modèle statistique** qui est, en principe, un **modèle dominé** (pr à une mesure donnée). Sa seconde application partielle $\theta \mapsto L(X, \theta)$ définit une (sous-) **variété différentielle** stochastique (en raison de X) : il s'agit en général d'une hyper-surface $\theta \mapsto L(X, \theta)$ dans $\mathbf{R}^{Q+1}$;

(b) **modèle de régression** (non linéaire) (cf **régression**). L'équation (paramétrée) $b \in \mathbf{R}^Q \mapsto F(b)$ d'un **modèle non linéaire**, dans laquelle F dépend de la (N, K) -**matrice d'observation** X des K exogènes ξ , définit une (sous-)variété différentielle dans l'espace $\mathbf{R}^{Q+N}$;

(c) **estimateur ensembliste**. Un tel estimateur « régional » définit une « zone » plus ou moins « courbe » dans l'espace des **paramètres** ;

(d) **région de confiance** (ou **test** associé) (même contexte qu'en (c)).

En effet, la représentation géométrique de ces problèmes peut conduire à étudier la courbure « locale » de ces variétés, ie en général au **voisinage** de la **vraie valeur d'un paramètre**.