COVARIANCE CROISÉE RETARDÉE (C5, D2, F3, N)
(07 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Généralisation à deux **processus** de la notion d'**autocovariance**.

(i) Soit X et Y deux processus réel scalaires de carré intégrable, dont l'ensemble des **temps** T est un **groupe** additif abélien, noté (T, +) (eg T = **Z**, ou T = **Q**, ou T = **R**).

On pose, $\forall$ (s, t) $\in T^2$:

(1)
$$E\, X_t = \mu_x(t), \qquad E\, Y_t = \mu_y(t) \qquad \text{(espérances mathématiques)},$$
$$C(X_s, Y_t) = E\,(X_s - \mu_x(s))(Y_t - \mu_y(t)) = \gamma_{xy}(s, t) \qquad \text{(covariances)}.$$

On appelle :

(a) μ_x (resp μ_y) la **moyenne temporelle** (théorique) propre de X (resp de Y) ;

(b) la fonction $t \mapsto \mu_x(t)$ (resp $t \mapsto \mu_y(t)$) la **trajectoire moyenne** (théorique) de X (resp de Y) ;

(c) $\gamma_{xy}(s, t)$ la **covariance croisée**, ou **intercovariance**, (théorique) d’ordre (ou de type) (s, t) de X et de Y (ou de X pr à Y) ;

(d) la fonction $(s, t) \mapsto \gamma_{xy}(s, t)$ la **fonction de covariance croisée**, ou **fonction d'intercovariance**, (théorique) de X relativement à Y.

Les coefficients $\gamma_{xy}(s, t)$ sont appelés **coefficients de covariance croisée** (théoriques).

(ii) Lorsque X et Y sont des **processus stationnaire en covariance** :

(a) $\mu_x(t)$ et $\mu_y(t)$ ne dépendent pas de t et s'écrivent simplement μ_x et μ_y ;

(b) $\gamma_{xy}(s, t)$ ne dépend que de la différence $\theta = t - s$ et se note $\gamma_{xy}(\theta)$. Autrement dit :

(2)
$$\gamma_{xy}(\theta) = C(X_s, X_t) = C(X_s, X_{s+(t-s)}) = C(X_s, X_{s+\theta}),$$
$$\forall\, s \in T \text{ et } \forall\, \theta \in T.$$

La fonction de covariance croisée $\theta \mapsto \gamma_{xy}(\theta)$ est alors notée γ_{xy} (**fonction numérique** réelle définie sur T).

(iii) On définit des **coefficients de covariance croisée** (empiriques) d'ordre θ analogues aux coefficients théoriques $\gamma_{xy}(\theta)$ (cf **statistique naturelle**).

Si $x = (x_t)_{t=1,\ldots,T}$ et $y = (y_t)_{t=1,\ldots,T}$ sont deux **séries temporelles** resp issues de X et Y et observées en **temps** discret, les **coefficients de covariance croisée** empiriques de x pr à y sont définis par les **statistiques** (on remplace chaque loi théorique par la **loi empirique** déduite de chacun des échantillons, ici les séries temporelles) :

(3) $\quad r_{xy}(\theta) = (T - \theta)^{-1} \Sigma_{t=1}^{T-\theta} (x_t - \bar{x}_T)(y_{t+\theta} - \bar{y}_T), \qquad \forall\, \theta \in N_{T-1}^*,$

où $\bar{x}_T$ et $\bar{y}_T$ sont les **moyennes empiriques** resp de x et y.

Ces coefficients sont des estimateurs « naturels » des coefficients théoriques $\gamma_{xy}(\theta)$, $\forall\, \theta \in N_{T-1}^*$.

(iv) Dans le cas général, comportant plus de deux processus (resp séries), les définitions précédentes s'appliquent encore en associant 2 à 2 ces processus (resp ces séries).

S'il existe K processus, on définit alors une **matrice de(s) covariance(s) croisée(s) retardée(s)** (théorique) (resp empirique) d'ordre K, $\forall\, \theta \in T$ (resp $\forall\, \theta \in N_{T-1}^*$).

Ces deux matrices ne sont pas, en général, symétriques.