CRITÈRE DE CAUCHY (A4, E)
(22 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Critère concernant une suite de va, analogue au critère de CAUCHY de l'analyse mathématique (cf **suite de CAUCHY**).

(i) Soit (Ω, $\mathcal{T}$, P) un **espace probabilisé**, ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$) un **espace probabilisable** et X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **va** $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.

(a) Si $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ et si $X \in L^2_{\mathcal{X}}$ (Ω, $\mathcal{T}$, P), le **critère de A.L. CAUCHY** dans L^2 exprime l'équivalence (cf **limite en moyenne quadratique**, **norme**) :

(1) $\lim_n X_n \to^{m.q.} X_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha,\beta} N_2 (X_\alpha - X_\beta) = 0,$

où $\lim_{\alpha,\beta}$ () désigne la limite de l'expression () lorsque $\alpha \to \infty$ et $\beta \to \infty$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$.

Autrement dit, pour qu'une suite de va converge vers une va (éventuellement dégénérée) X_∞ dans L^2, il faut et il suffit que la limite de la norme (dans L^2) de la différence de deux termes quelconques de cette suite soit nulle (cf **loi dégénérée**).

(b) Si $\mathcal{X}$ est un **espace de BANACH**, le **critère (faible) de CAUCHY** exprime l'équivalence suivante (**convergence en probabilité**) :

(2) $P\text{-}\lim_n X_n = X_\infty \Leftrightarrow P\text{-}\lim_{\alpha,\beta} (X_\alpha - X_\beta) = 0.$

Le **critère (fort) de CAUCHY** s'exprime par l'équivalence suivante (**convergence presque sûre**) :

(3) $\lim_n X_n = X_\infty$ (P-p.s.) $\Leftrightarrow \lim_{\alpha,\beta} (X_\alpha - X_\beta) = 0$ (P-p.s.).

(ii) Comme en analyse mathématique, ce critère permet ainsi d'établir l'existence d'un **mode de convergence** pour une suite de va sans avoir à en connaître la limite X_∞ .