DÉCISION (G)
(16 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie de la décision** (statistique), fondée sur la notion de **décision statistique**, intervient de façon centrale en **Statistique** : **plans d'expérience**, **sondages**, **inférence statistique** bayésienne, **théorie des jeux** (aspects probabilistes aussi bien que statistiques), **probabilités subjectives**, **estimation**, **tests** et **régions de confiance**, **classifications**, **prévision**, etc.

D'une manière générale, pour résoudre un problème donné, l'**homme de l'art** ou le **statisticien** opère des **choix**, appelés **décisions**, d'où résulteront, le plus souvent des **actions** et des **résultats** ou **conséquences** (résultantes des actions).

Les aspects normatifs de la **prise de décision** sont notamment fondés sur deux concepts :

(a) la notion d'**utilité** résultant (des conséquences) d'une décision, ie la notion de valeur subjective attachée à un résultat ;

(b) la notion de **(loi de) probabilité**, entendue comme « vraisemblance » d'un résultat qui est la conséquence d'une décision (cf aussi **probabilité subjective**, **Ecole bayésienne**).

Ces concepts sont généralement combinés avec des principes statistiques fondamentaux, dont les deux suivants.

(i) **Principe de maximisation de l'utilité moyenne**. Ce principe, aussi appelé **critère de l'espérance (au sens de) J. von NEUMANN - O. MORGENSTERN**, consiste à décider en maximisant l'**espérance mathématique** de l'utilité précédente.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P^{\xi})$ son image par une **variable aléatoire** $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$, $(D, \mathcal{B}_D)$ un **espace de décision** et $g : \mathcal{X} \times D \mapsto \mathbf{R}$ une **fonction de gain** (net) qui associe à tout résultat $x \in \mathcal{X}$ et à toute décision $d \in D$ une valeur $g(x, d)$, qui peut donc être négative (perte). La valeur moyenne du gain résultant d'une décision d donnée est donc :

(1) $$\bar{g}(d) = \int g(x, d)\, dP^{\xi}(x).$$

Cependant, l'utilité d'un gain peut être différente du gain lui-même. Aussi, au lieu de maximiser $\bar{g}(d)$, le décideur peut vouloir maximiser plutôt l'**utilité moyenne du gain** résultant de d, ie (cf **fonction d'utilité**) :

(2) $$\bar{u}(d) = \int u(g(x, d))\, dP^{\xi}(x),$$

où $u : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ est la **fonction d'utilité** (du statisticien) associée aux gains.

(ii) **Principe de T. BAYES**, ou **principe bayésien**. Ce principe est fondé sur le **théorème de BAYES** et les **probabilités subjectives** prises en compte par l'école bayésienne. Cette dernière associe au schéma probabiliste ($\mathcal{X}$ x D, $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_D$, Q) une **probabilité a priori** (ou une **probabilité subjective**) donnée Π_D sur $\mathcal{B}_D$ et une probabilité P^ξ sur $\mathcal{B}$. Le **théorème de BAYES** indique alors que la **probabilité a posteriori** d'avoir décidé d alors que le résultat est x, est :

(3) $P (d / x) = P (x / d) \Pi_D (d) / P^\xi$,

où Π (. / d) est la **probabilité conditionnelle** sachant d. La formule (3), appliquée à deux décisions alternatives d' et d'' conduisant au même résultat x, aboutit au rapport :

(4) $P (d' / x) / P (d'' / x) = P (x / d') \Pi_D (d') / P (x / d'') \Pi_D (d'')$,

ou, de façon équivalente, à la relation :

(4)' $\rho_x (d', d'') = \lambda_{d'd''} (x) . \tau_{d'd''}$,

dans laquelle ρ_x (d', d'') est appelé **rapport a posteriori**, $\lambda_{d'd''}$ (x) **rapport de vraisemblance** et $\rho_{d'd''}$ **rapport a priori**.

Les relations (3) et (4) montrent aussi comment l'on peut modifier (d' $\mapsto$ d'') les décisions à la lumière d'une **information** nouvelle x.

(iii) En pratique, cependant, on observe aussi des comportements de « conservatisme » peu compatibles avec les principes précédents (cf eg **théorie des tests**).

(iv) D'autres principes de décision ont été développés. Notamment :

(a) **principe « minimax » de A. WALD**. Aussi appelé **principe des règles de décision « minimax »**, ou **principe des critères de décision « minimax »**, ce principe consiste à décider en sorte que le plus grand **risque** soit minimisé. Il s'associe naturellement au **principe de précaution** ;

(b) **principe de parcimonie**. Conçu pour « économiser » le nombre de **variables** ou de **paramètres** tout en simplifiant l'analyse statistique, ce principe vise à réduire la **complexité d'un modèle statistique** (cf **complexité**).