DÉCOMPOSITION D'UN ESPACE DE HILBERT (A4, H, J)
(05 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Un **espace de HILBERT** peut être décomposé en somme directe de deux sous-espaces dont l'un est initialement donné.

(i) Soit E un espace de HILBERT sur **K** = **R** (ou **K** = **C**) et V un sous-**espace vectoriel** complet de E tq $V \neq \emptyset$ et $V \neq \{0\}$ (cf **espace complet**). Tout élément x de E peut alors s'écrire, de façon unique :

(1) $x = v + y$,

avec $v \in V$ et $y \in V^{\perp}$ (orthogonal de V).

De plus, v est le seul élément de V pour lequel la fonction $w \in V \mapsto ||x - w|| \in \mathbf{R}_+$ atteint sa borne inférieure, ie :

(2) $||x - v|| = \inf_{w \in V} ||x - w||$.

On pose souvent $v = pr_V\, x$ (ou parfois $v = pr^{\perp}$), et l'application $pr_V : E \mapsto V$ définie par :

(3) $x \mapsto pr_V\, x = v$

est appelée **projecteur** de E sur V.

L'image de x par pr_V est dite **projection orthogonale** de x sur V. Par suite, on peut décomposer tout élément $x \in E$ selon la décomposition :

(3) $x = pr_V\, x + pr_{V\perp}\, x$,

où le symbole $V\perp$ désigne $V^{\perp}$.

(ii) Diverses méthodes d'**estimation**, dites méthodes par **projection**, font usage de cette propriété : **régression dans L^2**, **estimateur à distance minimale** ou **méthode de moindre norme** (cf aussi **projecteur**, **théorème de la projection orthogonale**).