DÉCOMPOSITION DE KARHUNEN-LOÈVE (N7)

Certains processus peuvent être représentés sous la forme d'une série de **va** : c'est le cas de la **décomposition de KARHUNEN - LOÈVE**. L'étude de ce type de décomposition est la base de l'**analyse harmonique**.

(i) Soit X = {(Ω, $\mathcal{T}$, P), ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$), $(X_t)_{t \in T}$ un **processus stochastique** tq :

(a) ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$) = (**R**, $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$) (processus réel scalaire) ;

(b) T $\subset$ **R** est muni de la **tribu de parties** $\mathcal{B}_T$, **trace** de la tribu $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ sur T, et $\mathcal{B}_T$ est munie d'une **mesure positive** μ (processus en **temps** continu) ;

(c) X est du second ordre : X $\in L_{\mathcal{X}}^2$ (Ω, $\mathcal{T}$, P) (ie $X_t \in L_{\mathcal{X}}^2$ (Ω, $\mathcal{T}$, P), $\forall$ t $\in$ T) ;

(d) X est un **processus continu** en moyenne quadratique (cf **processus continu dans L^p**), ie ses **trajectoires** t $\mapsto$ X (ω, t) sont tq :

(1) $\lim_{\tau \downarrow 0,\, t+\tau \in T} E (X_{t+\tau} - X_t)^2 = 0, \qquad \forall\, t \in T.$

On définit la **fonction de covariance** C de X selon :

(2) $C (t, \tau) = C (X_t , X_\tau), \qquad \forall\, (t, \tau) \in T^2,$

et l'**opérateur de covariance** $\Gamma : L_{\mathbf{R}}^2 (T, \mathcal{B}_T , \mu) \mapsto L_{\mathbf{R}}^2 (T, \mathcal{B}_T , \mu)$ selon :

(3) $\Gamma (f) = g, \quad \text{avec } g (t) = \int_T C (t, \tau) f (\tau) d\mu (\tau), \qquad \forall\, t \in T.$

Sous certaines hypothèses, on montre qu'il existe une suite $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $L_{\mathbf{R}}^2$ (T, $\mathcal{B}_T$, μ) et une suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbf{N}}$ décroissante de nombres réels (ie les **valeurs propres** de l'opérateur Γ), tq :

(a) $(f_i)_{i \in \mathbf{N}}$ et une **suite orthonormale** dans $L_{\mathbf{R}}^2$ (T, $\mathcal{B}_T$, μ), ie :

(4) $\int_T f_i (t) . f_j (t) d\mu (\tau) = \delta_{ij} , \ \forall\, (i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$;

(où δ_{ij} désigne le **symbole de KRONECKER**) ;

(b) $\lambda_i \geq 0$ ($\forall$ i $\in$ **N***) et $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0$;

(c) si ($f_i \otimes f_j$) désigne l'opérateur, de rang 1, défini par :

(5) $h \mapsto \{\int_T h (t) f_i (t) d\mu (t)\} . f_i$;

alors :

(6) $\Gamma = \Sigma_{i \in N^*} \lambda_i (f_i \otimes f_j)$;

(d) le second membre de l'équation suivante converge uniformément vers le premier (cf **convergence uniforme**) :

(7) $C(t, \tau) = \Sigma_{i \in N^*} \lambda_i . f_i(t) . f_i(\tau), \quad \forall (t, \tau) \in T^2$.

Ces résultats conduisent à la **décomposition harmonique** suivante de X, appelée **représentation de K. KARHUNEN - M. LOÈVE** :

(8) $X_t = E X_t + \Sigma_{i \in N^*} (\lambda_i)^{1/2} . f_i(t) . \xi_i$,

au sens de la **convergence en moyenne quadratique** du second membre vers le premier.

Dans (8), les **vars** ξ_i ($\forall$ i $\in$ **N***) définies par :

(9) $$\xi_i = \begin{cases} (\lambda_i)^{1/2} \int_T (X_t - E X_t) . f_i(t) \, d\mu(t) & (\forall \text{ i tq } \lambda_i > 0), \\ 0 & (\forall \text{ i tq } \lambda_i = 0), \end{cases}$$

sont supposées avoir été normalisées (ie centrée réduites) (cf **normalisation**) et être non corrélées (cf **corrélation**), ie :

(10) $E \xi_i = 0, \quad C(\xi_i, \xi_j) = 0, \quad \forall (i, j) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

Les **va** $\eta_i(t) = (\lambda_i)^{1/2} f_i(t) \xi_i$ de (8) sont appelées **composantes harmoniques** de X ; les fonctions f_i sont dites (fonctions) **harmoniques** de X, et les va ξ_i sont appelées **composantes** de X.

(ii) Comme pour l'**analyse en composantes principales**, on peut écrire la **variance totale** de X selon :

(11) $V X = E \int_T (X_\tau - E X_\tau)^2 d\mu(\tau) = \int_T C(\tau, \tau) \, d\mu(\tau) = \Sigma_{i \in N^*} \lambda_i = \text{tr } C$.

La part de variance imputable à la composante $(\lambda_i)^{1/2} \xi_i$ vaut donc : $\lambda_i / V X$.

(iii) La représentation de KARHUNEN-LOÈVE s'étend à des processus à valeurs dans un **espace de HILBERT** $\mathscr{X}$, muni de sa **tribu borélienne** $\mathscr{B}$.