DENSITÉ MARGINALE (C5)
(01 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **densité marginale**, ou **densité propre**, est la **densité de probabilité** de la **loi** d'une **variable aléatoire** donnée, indépendamment des valeurs prises par d'autres va dont elle peut dépendre (cf **indépendance**, **dépendance**). La notion suppose la donnée d'une **loi multivariée**, et en particulier d'une **loi multidimensionnelle**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ un espace produit $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$, et $\zeta = (\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ un **couple aléatoire**, dont les coordonnées ne sont pas nécessairement indépendantes entre elles, et dont la loi P^{ζ} admet h pour densité pr à une **mesure positive** ϖ (définie sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$).

Si les opérations (intégration, etc) ont un sens, la **loi marginale**, ou **loi propre**, P^{ξ} de ξ admet alors pour **densité marginale**, ou **densité propre,** (pr à μ) :

(1) $\quad x \mapsto f(x) = \int_{\mathcal{Y}} h(x, y)\, d\nu(y), \qquad \mu\text{-p.p.},$

où ν désigne la **restriction** de ϖ à la **tribu** $\mathcal{C}$ et μ celle de ϖ à $\mathcal{B}$.

(ii) En particulier, si $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K))$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{C}) = (\mathbf{R}^G, \mathcal{B}(\mathbf{R}^G))$ (avec les **tribus boréliennes** correspondantes), on note encore P^{ζ} la loi de ζ et $h = dP^{\zeta} / d(\lambda_{K+G})$ sa **densité** pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_{K+G} .

On appelle alors **densité marginale**, ou **densité propre**, du vecteur ξ, ou de sa loi P^{ξ}, la **densité de probabilité** définie par :

(2) $\quad x \mapsto f(x) = \int_{\mathbf{R}G} h(x, y)\, d\lambda_G(y), \qquad \lambda_K\text{-p.p.},$

où **R**G désigne $\mathbf{R}^G$.

Cette densité n'est autre que la densité de la lp P^{ξ} du vecteur aléatoire ξ (**mesure image** de P par ξ), elle-même appelée **loi marginale**, ou **loi propre** de ξ, pr à $d\lambda_K$ (ie $f = dP^{\xi} / d\lambda_K$).

(iii) La notion s'étend au cas d'un sous-vecteur $pr_{j(1)\ldots j(M)}\, \xi = (\xi_{j(1)}, \ldots, \xi_{j(L)}) = (\upsilon_1, \ldots, \upsilon_L) = \upsilon$ de ξ (avec $L \leq K$) (j(m) désigne par commodité l'indice j_m). La **densité marginale** f_υ de $(\xi_{j(1)}, \ldots, \xi_{j(L)})$ est alors calculée selon :

(3) $\quad f_\upsilon = \int_{\mathbf{R}(K\text{-}L)} f(x) \prod_{k \in J^*} dx_k\,, \qquad \lambda_K\text{-p.p.},$

où f est la densité de ξ pr à λ_K , $J^* = J^c$ (complémentaire de $J = \{j_1, \ldots, j_L\}$ dans N_K^*) et $\mathbf{R}(K\text{-}L) = \mathbf{R}^{K\text{-}L}$.

Autrement dit, on intègre la densité f de ξ pr aux variables ξ_k autres que celles du L-uple ($\xi_{j(1)}$,..., $\xi_{j(L)}$).

(iv) Lorsque les variables données sont indiscernables, la densité de la **loi conjointe** de certaines d'entre elles résulte d'une démarche identique à la précédente.

(v) Plus généralement, et sous certaines conditions, on peut définir les concepts de **loi marginale** et de **densité marginale** à partir d'une suite de va qui est « mixte », ie dont une sous-suite est constituée de **variables numériques** et l'autre sous-suite de **variables qualitatives** (cf **loi multivariée**).