

DENSITÉ SPECTRALE (C5, F3, N)

(10 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Comme toute **densité**, la **densité spectrale** peut se définir :

(a) soit comme **dérivée** (au sens de l'analyse) d'une **fonction de répartition** (la **fonction de répartition spectrale**) ;

(b) soit comme **dérivée de NIKODYM-RADON** d'une mesure (de probabilité) associée à cette fr spectrale.

La notion concerne souvent des **processus du second ordre**.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** réel scalaire en **temps** discret (avec $T = \mathbf{Z}$), supposé être un **processus stationnaire en covariance** (**stationnarité** faible).

On appelle **densité spectrale** de X la **transformée de FOURIER** de sa **fonction d'autocovariance** $\gamma : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{R}$ définie par $\theta \mapsto \gamma(\theta) = \gamma_\theta$ (coefficient d'**autocovariance** d'ordre θ). Si l'on note f cette densité spectrale, on a donc :

$$(1) \quad f(\theta) = (2\pi)^{-1} \sum_{\omega \in \mathbf{Z}} \gamma(\omega) e^{-i\omega\theta} = (2\pi)^{-1} \sum_{\omega \in \mathbf{Z}} \gamma(\omega) \cos(\omega\theta), \quad \forall \theta \in \mathbf{Z}.$$

Lorsque plusieurs processus sont considérés (ie lorsque X_t est un **processus vectoriel**), la fonction f est plutôt notée f_X ou encore f_X (densité spectrale propre de X).

(ii) Si l'on note F la **fonction de répartition spectrale** de X , on a donc :

(a) $f = F'$ (dérivée de F , définie λ_1 -p.p.) ;

(b) $f = dF / d\lambda_1$ (dérivée de NIKODYM-RADON de la **mesure spectrale** associée à F , mesure aussi notée F , pr à la mesure de LEBESGUE).

Dans le cadre précédent, on montre que :

(a) f est une **fonction numérique** réelle, positive (ie $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}_+$) et paire (ie $f(-\theta) = f(\theta)$, $\forall \theta \in \mathbf{Z}$) ;

(b) f est périodique, de période 2π ;

(c) f est continue ;

(d) la **transformation de FOURIER** étant injective, on a la **formule de réciprocité** suivante (duale de (1)) :

$$(2) \quad \gamma(\theta) = \int_{\mathbf{I}} f(\omega) e^{i\omega\theta} d\lambda_1(\omega) = \int_{\mathbf{I}} f(\omega) \cos(\omega\theta) d\omega, \quad \forall \theta \in \mathbf{Z},$$

où l'on note (usuellement) $d\omega$ pour $d\lambda_1(\omega)$ et où $I = [-\pi, +\pi]$;

(e) si X est centré (ie $E X_t = 0, \forall t \in T$) et si l'on définit un **processus à retards échelonnés** Y selon le **filtrage** linéaire suivant :

$$(3) \quad Y_t = \sum_{j \in Z} b_j Y_{t-j}, \quad \forall t \in T,$$

où la **suite** $b = (b_j)_{j \in Z}$ vérifie $\sum_{j \in Z} |b_j| < +\infty$, alors $Y = (Y_t)_{t \in T}$ est aussi stationnaire en covariance et l'on établit la **formule de changement de densité spectrale** (cf aussi **transfert de mesure**) :

$$(4) \quad f_Y(\omega) = |\sum_{\theta \in Z} b_\theta e^{i\omega\theta}|^2 \cdot f_X(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbf{R}.$$

(iii) Si $x = (x_t)_{t \in T}$ est une **série temporelle** engendrée par X (cf aussi **trajectoire**), on définit la **densité spectrale empirique** de x (ou de X) selon (cf aussi **périodogramme**) :

$$(5) \quad f_T(\omega) = (2\pi)^{-1} (T)^{-1} |\sum_{t=1}^T e^{-it\omega} x_t|^2 \cdot f_X(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbf{R}.$$

Si f_T constitue ainsi un **estimateur** naturel de f (densité spectrale de X) (cf **statistique naturelle**), celui-ci n'est cependant pas un **estimateur convergent** (en probabilité) (ponctuellement) (cf aussi **cospectre, estimateur du spectre**).