**DÉRIVATION SOUS LE SIGNE D'INTÉGRATION (A5, A7)**
(05 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un **espace mesuré**, $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle **ouvert** et $f : \Omega \times I \mapsto \mathbf{K}$ (avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) une fonction tq :

(a) la deuxième application partielle $f(\omega, .)$ est dérivable sur I, pour $\mu$-presque tout $\omega \in \Omega$ ;

(b) la première application partielle $f(. , x)$ est intégrable pr à $\mu$, $\forall x \in I$ ;

(c) il existe une fonction $g : \Omega \mapsto \mathbf{R}_+$ , intégrable sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et tq :

(1) $|(d / dx) f(\omega, x)| \leq g(\omega)$, ie $|D_2 f(\omega, x)| \leq g(\omega)$, $\forall x \in I$.

On montre alors que la fonction $\psi : I \mapsto \mathbf{K}$ définie par :

(2) $\psi(x) = \int f(\omega, x) \, d\mu(\omega)$,

existe $\forall x \in I$ est qu'elle est dérivable sur I. Sa dérivée $\psi'$ s'obtient par la **règle de G.W. LEIBNITZ** :

(3) $\psi'(x) = \int (d / dx) f(\omega, x) \, d\mu(\omega)$ ou $\int D_2 f(\omega, x) \, d\mu(\omega)$.

Autrement dit, on peut dériver $\varphi$ sous le signe d'intégration.

Cette permutation entre opération de dérivation et opération d'intégration est appelée **dérivation sous le signe d'intégration**, ou encore **dérivation sous le signe somme** (ou sous le signe $\int$).