DÉRIVÉE (A7)
(17 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Soit E et F deux **espaces vectoriels normés** sur le corps **K** = **R** (ou **K** = **C**) et U un **ouvert** de E.

(i) On dit que f : U $\mapsto$ F et g : U $\mapsto$ F sont des **application (mutuellement) tangentes** en un point a $\in$ U ssi, $\forall$ ε > 0, il existe un **voisinage** V_a de a tq :

(1) $||\{f(x) - f(a)\} - \{g(x) - g(a)\}|| \leq \varepsilon . ||x - a||, \quad \forall x \in U \cap V_a$,

ce qui se note aussi (notation « petit zéro ») :

(1)' $||\{f(x) - f(a)\} - \{g(x) - g(a)\}|| = o(||x - a||)$.

Si (1) vaut pour tout a $\in$ U, on dit que f et g sont (mutuellement) tangentes sur U.

(ii) On dit que f : U $\mapsto$ F est une **application différentiable** au point a $\in$ U ssi il existe une **application linéaire** (ie un **homomorphisme**) continue u $\in$ $\mathcal{L}$ (E, F) tq les applications f et :

(2) $g : x \mapsto g(x) = f(a) + u(x - a)$

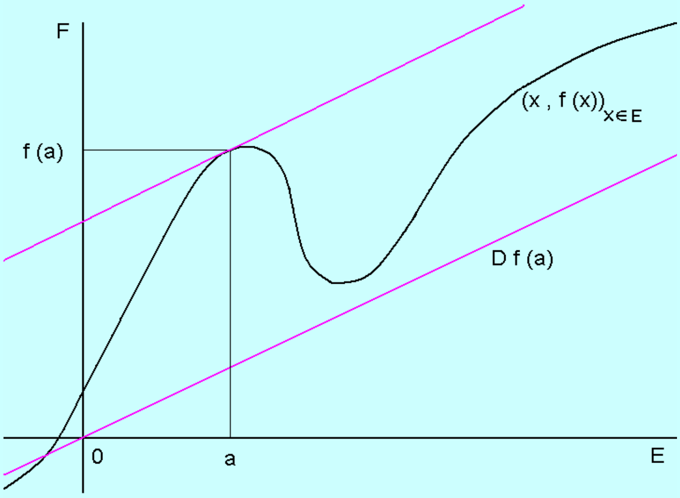
soient tangentes au point a, ie :

(3) $||f(x) - f(a) - u(x - a)|| = o(||x - a||)$.

L'application f est dite différentiable sur U ssi elle est différentiable en tout point a $\in$ U (cf **différentiabilité**).

Si a $\in$ U, l'application linéaire continue décrite en (2), si elle existe, est unique (cf graphique ci-dessous).

représentation schématique de la notion de dérivée



la dérivée de f au point a est ici représentée par la variété linéaire, aussi notée D f (a), passant par l'origine 0.
La variété (affine) tangente à f en a passe donc par le point (a , f (a)) et elle est parallèle à D f(a)

On l'appelle **dérivée (totale)** de f au point a $\in$ U et on la note f ' (a), ou f'_a , ou D f (a) ou D_a f. Autrement dit, f ' (a) $\in \mathscr{L}$(E, F), et on l'appelle **différentielle** de f au point a.

(iii) Si f est différentiable sur U, l'application de U dans $\mathscr{L}$(E, F) définie par x $\mapsto$ f ' (x) est apppelée **(application) dérivée** de f sur U. L'opération f $\mapsto$ f ' s'appelle **dérivation**. La dérivée f ' de f est aussi notée D f ou df / dx.

(iv) On montre que, si f : U $\mapsto$ F est différentiable au point a $\in$ U, alors f est une **application continue** en ce point. De même, si f est différentiable sur U, elle est alors continue sur U. Si f : U $\mapsto$ F est continue et différentiable au point a $\in$ U, alors f ' (a) est continue en ce point.

(v) On dit que f est **continûment différentiable** au point a (resp sur U) ssi elle est différentiable au point a (resp sur U) et ssi sa dérivée est continue en ce point (resp sur U). On dit aussi que f est de **classe C^1**.

Lorsque Dim E = n et Dim F = n, E et F étant munis de **bases** données, on identifie souvent f ' (a) à une **matrice** M $\in M_{mn}$ (**K**) (ie on identifie l'application linéaire et sa matrice représentative dans les bases considérées). En particulier :

(a) si f $\in$ Hom (E, F), on a f ' (a) = f $\in \mathscr{L}$(E, F), $\forall$ x $\in$ E.

(b) si E = $\Pi_{i=1}^{n} E_i$ et si m : E $\mapsto$ F est une application n-linéaire continue (cf **application multilinéaire**), sa dérivée au point a $\in$ U est l'application linéaire :

(4) $m'(a) : h \mapsto \Sigma_i \; m(a_1 ,..., a_{i-1} , h_i , a_{i+1} ,..., a_n)$,

et l'on note m' (a)(h) ou m' (a) . h sa valeur en h = (h_1 ,..., h_n).

(c) si E et F sont deux **espaces de BANACH** linéairement homéomorphes (ie tq il existe un **homéomorphisme** linéaire u : E $\mapsto$ F, et l'ensemble U de tels u est un ouvert de $\mathscr{L}$(E, F)), et si $\mathscr{U}^{-1}$ est l'ensemble des homéomorphismes linéaires u^{-1} : F $\mapsto$ E, alors l'application f : $\mathscr{U} \mapsto \mathscr{U}^{-1}$ définie par :

(5) $u \in \mathscr{U} \mapsto f(u) = u^{-1} \in \mathscr{U}^{-1}$

est continue et différentiable. Sa dérivée au point a $\in$ U est l'application linéaire f ' (a) : $\mathscr{L}$ (E,F) $\mapsto$ $\mathscr{L}$(F, E) définie par :

(6) $f'(a) : v \mapsto -a^{-1} \circ v \circ a^{-1}$.

(vi) Si f ' : U $\mapsto$ $\mathscr{L}$(E, F) est différentiable au point a $\in$ U (resp sur U), on dit que f est une application deux fois différentiable au point a (resp sur U). La dérivée de f ' au point a (resp sur U) est appelée **dérivée seconde** de f au point a (resp sur U) et on la note f '' (a) ou D^2 f (a), ou $f^{(2)}$ (a) (resp f '' ou D^2 f ou $f^{(2)}$). On a f '' (a) $\in \mathscr{L}$(E,$\mathscr{L}$(E,F)), espace qui est isométrique à l'espace $\mathscr{L}^2$ (E, F) = $\mathscr{L}$ (E^2, F) des applications linéaires continues de E^2 dans F (cf **isométrie**).

Plus généralement, la dérivée de l'application D^{p-1} f (avec p $\geq$ 2), supposée différentiable au point a (resp sur U), est appelée **dérivée d'ordre p** de f au point a (resp sur U) et on la note $f^{(p)}$ (a) ou D^p (a) ou d^p f(a) / dx^p ou encore (d^p f / dx^p)(a) (resp $f^{(p)}$ ou D^p f ou d^p / dx^p).

On montre que :

(a) $f^{(p)} \in \mathscr{L}^p$ (E, F) (espace des applications p-linéaires continues de E^p dans F) ;

(b) pour tout p $\in$ **N*** \ {1} et tout a $\in$ U, $f^{(p)}$ (a) est une application p-linéaire symétrique. On écrit :

(7) $(h_1 ,..., h_p) \mapsto f^{(p)} (a).(h_1 ,..., h_p)$,

ou, plus simplement, h $\mapsto$ $f^{(p)}$ (a) . h.

On dit que f est p fois (resp infiniment) différentiable au point a (resp sur U) ssi $f^{(p-1)}$ est différentiable au point a (resp sur U).

De même, f est dite de **classe C^p** en a (resp sur U) ssi $f^{(p-1)}$ est de classe C^1 en a (resp sur U).