DÉTERMINANT (A3)
(06 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Un **déterminant** est un scalaire attaché à une **matrice** carrée ou à un **homomorphisme**.

(i) Soit E un **espace vectoriel** sur un corps commutatif **K**, supposé de dimension finie (Dim E = n). Soit $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ un système de n vecteurs $x_i \in E$.

On appelle **déterminant** de ce système une **forme multilinéaire** alternée D sur E, qui prend la valeur 1 lorsque le système se réduit à la **base canonique** $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de E. Un déterminant vérifie les propriétés de définition suivantes :

(a) alternance :

(1) $D(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = - D(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$;

(b) homothétie (ou proportionnalité) :

(2) $D(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha . x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \alpha . D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$,

$\forall \alpha \in$ **K** et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$;

(c) additivité :

(3) $D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i' + x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n) + D(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \dots, x_n)$;

(d) normalisation :

(4) $D(e_1, \dots, e_n) = 1$,

où $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)' \in E$ (avec 1 en i-ième coordonnée et 0 ailleurs).

(ii) On appelle **déterminant** d'une **matrice** $A \in M_n$ (**K**) (dans une **base** donnée de E) le déterminant du système de ses vecteurs colonnes $(a_j)_{j=1,\dots,n}$ (resp de ses vecteurs lignes $(A_i)_{i=1,\dots,n}$) rapportés à la base considérée.

Le déterminant d'une matrice A est noté de façon variée : Dét A, ou |A|, ou Dét a_{ij}, ou Dét (a^j), ou Dét (A_i), ou encore det A.

Celui-ci vérifie les propriétés suivantes :

(a) $|A'| = |A|$ et $|I_n| = 1$;

(b) $|\alpha . A| = \alpha^n . |A|$ et $|A . B| = |A| . |B|$;

(c) $|A| = \Sigma_i a_{ij} A_{ij} = \Sigma_j a_{ij} A_{ij}$ (développements en ligne et en colonne), avec $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, **cofacteur** de a_{ij} (où D_{ij} est le **(déterminant) mineur**, ie le déterminant déduit de A par suppression de sa ligne i et de sa colonne j). On écrit aussi :

(8) $\det A = \Sigma_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$,

où A_{ij} est le cofacteur de a_{ij} ;

(d) le déterminant de la **matrice des cofacteurs**, ou **comatrice**, Com A de A vérifie :

(9) $|\text{Com } A| = |A|^{n-1}$;

(e) développements en lignes ou en colonnes :

(10)
$$\Sigma_{i=1}^{k} a_{ij} A_{ik} = 0, \quad \text{si } k \neq j,$$
$$\Sigma_{i=1}^{k} a_{ij} A_{kj} = 0, \quad \text{si } k \neq i ;$$

(f) soit $A \in M_n(\mathbf{K})$, $x \in \mathbf{K}^n$, $y \in \mathbf{K}^n$ et $\alpha \neq 0$. On note $B = (A, x / y', \alpha)$ la (n+1,n+1)-matrice formée par ces éléments. Alors :

(11) $\text{Dét } B = \alpha \text{ Dét } \{A - \alpha^{-1} x y'\} = (\alpha - y' A^{-1} x) \text{ Dét } (A)$;

(g) si $V \xi = (\sigma_{kl})_{(k,l)} = \Sigma$ est la **matrice des covariances** d'un **vecteur aléatoire** $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$, et si Γ est sa **matrice des corrélations**, on a :

(12) $|\Sigma| = (\Pi_{k=1}^{K} \sigma_{kk}) . |\Gamma|$.

(iii) Soit $f \in \text{Hom}(E, F)$ une **application linéaire** (cf **homomorphisme**) de E dans F, avec Dim F = Dim E = n. On note $A \in M_n(\mathbf{K})$ la matrice représentative de f dans des bases données de E et F.

On appelle alors **déterminant** de l'homomorphisme f, et on note Dét f ou |f|, le déterminant de la matrice A associée à f.

On montre que :

(13) $F = E$ et $f = id_E \Rightarrow |f| = 1$.

Si Dét A $\neq 0$, on dit que A est une **matrice régulière**, ou une **matrice non singulière**, ou encore une **matrice inversible**. On note $R_n(\mathbf{K})$ l'espace des matrices carrées régulières de format (n,n). Dans ce cas :

(14)
$$\text{rg } A = n,$$
$$\text{Dét } (A^{-1}) = (\text{Dét } A)^{-1}.$$

Si Dét f $\neq$ 0, on dit que f est une **application linéaire** régulière, ou une **application linéaire non singulière**, ou encore une **application linéaire inversible**. Dans ce cas, f $\in \mathscr{B}$ (E, F) et rg f = n.

Si Dét A = 0, on dit que A est une **matrice singulière**, ou une **matrice non régulière**, ou encore une **matrice non inversible**.

De même, si Dét f = 0, on dit que f est une **application linéaire singulière**, ou une **application linéaire non régulière**, ou encore une **application linéaire non inversible**.

(iv) En **Statistique**, divers types de déterminants jouent un rôle important :

(a) déterminant de certaines matrices qui résultent d'une **matrice d'observation** donnée, et dont on peut parfois expliciter la loi : eg dét (X' X), où X $\in$ M_{NK} (**R**), ou encore la **loi de WILKS**) ;

(b) **déterminant caractéristique**, notamment en **analyse des données**. Son expression est de la forme dét (A - λ . I_n), et l'on peut en calculer les **valeurs propres** λ_i , $\forall$ i = 1 ,..., n (cf **équation caractéristique**) ;

(c) déterminant associé à des fonctions (ou statistiques) : distances ou formes quadratiques diverses (cf **test de LAWLEY-WILKS**, **distance de MAHALANOBIS**).