**DIFFÉRENCE FINIE (A16, N)**
(09 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

L'opération de différentiation (cf **dérivée**, **différentiabilité**) possède une analogue « discontinue » qui ne fait pas intervenir une notion de limite.

(i) Soit G et T deux **groupes algébriques** additifs, $x = (x_t)_{t \in T}$ une **suite** d'éléments de G indexée par T (ou application de T vers G), et $h \in G$ un élément donné :

(a) on appelle **(opérateur de) différence finie d'ordre 1 et de pas h** l'application, notée $\Delta_h^1$ ou simplement $\Delta_h : G^T \mapsto G^T$ définie par :

(1) $\Delta_h : x_t \mapsto \Delta_h x_t = x_{t+h} - x_t$ , $\forall t \in T : t + h \in T$.

L'image $(\Delta_h x_t)_{t \in T}$ de x par $\Delta_h$ , notée symboliquement $\Delta_h$ x, est appelée **famille des différences finies** (d'ordre 1 et de pas h) ;

(b) par récurrence, l'**(opérateur de) différence finie d'ordre p** $\in$ **N*** \ {1} **et de pas h** est l'application, notée $\Delta_h^p : G^T \mapsto G^T$, définie par :

(2) $\Delta_h^p x_t = \Delta_h (\Delta_h^{p-1} x_t)$, $\forall t \in T$ : tous les indices restent dans T.

On montre que :

(3) $\Delta_h^p x_t = \sum_{j=0}^p C_p^j (-1)^j x_{t + j h}$ ,

avec j h = h + ... + h (j fois), $\Delta_h^0$ = identité de $G^T$ et $\Delta_h^1 = \Delta_h$ .

(ii) Souvent, on n'utilise que la **restriction** des opérateurs $\Delta_h^p$ à des sous-espaces de suites de $G^T$. Ainsi, si T = **Z** et h = 1, on se restreint à **N**.

En particulier, si $\alpha \in$ **N*** et $x_t = t^\alpha$ ($\forall t \in$ **N**), on note $\Delta_p 0^\alpha$ a la valeur de $\Delta_p t^\alpha$ lorsque t = 0.

Lorsque G est un **espace vectoriel** sur un corps **K**, les opérateurs $\Delta_h^p$ sont des **opérateurs linéaires**, ie :

(4) $\Delta_h^p (\lambda' x_t' + \lambda'' x_t'') = \lambda' (\Delta_h^p x_t') + \lambda'' (\Delta_h^p x_t'')$, $\forall (\lambda', \lambda'') \in$ $\mathbf{K}^2$.

(iii) Un cas particulier important est obtenu avec h = 1 (ce qui suppose que T est un anneau, ou un corps, ou une partie de ceux-ci) : c'est l'(opérateur de) différence finie, ou **opérateur différence finie**.

Ainsi, l'**opérateur de différence finie d'ordre 1 et de pas 1**, ou **opérateur de différence finie d'ordre 1**, est tq $\Delta^1 x_t$ ou $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$ .

Par suite, on peut définir par récurrence $\Delta^p x_t = \Delta (\Delta^{p-1} x_t)$ et l'on montre que :

(5) $D^p x_t = (id_G - F)^p x_t$ ,

où $id_G$ désigne l'**identité** dans G et F : $G^T \mapsto G^T$ est l'**opérateur avance** (noté F d'après l'anglais « forward ») défini par $x_t \mapsto F x_t = x_{t+1}$ .

(iv) On pose parfois $\Delta_h x_t = x_t - x_{t-h}$ et $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ . On obtient alors des formules analogues à (2), (3) et (5), l'opérateur avance F étant remplacé par l'**opérateur retard** B.

On établit aussi les **formules d'inversion** suivantes :

$$y_t = (id_G - B)^p x_t \Leftrightarrow x_t = (id_G - B)^{-p} y_t ,$$

(6)

$$y_t = (id_G - F)^p x_t \Leftrightarrow x_t = (id_G - F)^{-p} y_t .$$

(v) La **méthode des différences finies** (O.D. ANDERSON - G. TINTNER) est parfois employée pour « éliminer » la **tendance** d'un **processus stochastique** ou d'une **série temporelle** lorsque cette tendance est polynômiale.

Si M est un processus réel scalaire tq $M_t = \Sigma_{j=0}^p b_j t^j$ (polynôme de degré p), alors $\Delta^{p+1} M_t = 0$. Par suite, si X est un processus qui se décompose entre tendance M et bruit blanc U selon X = M + U, on peut étudier le processus défini par l'équation $\Delta^{p+1} X_t = \Delta^{p+1} U_t$ .