

DISTANCE DE FAN (A4, A5, C, G8, N)

(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ un **espace normé** et $\mathcal{B}$ sa **tribu borélienne**. On note $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ l'**espace vectoriel** des **va** $\Omega \mapsto \mathcal{X}$, définies sur Ω et à valeurs dans $\mathcal{X}$.

On appelle **norme de K. FAN** la **norme** définie sur $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ par :

$$(1) \quad \|\xi\|_{KF} = \inf \{ \varepsilon > 0 : P(\|\xi\| > \varepsilon) < \varepsilon \}.$$

La **distance de K. FAN** sur $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ est la distance δ_F déduite de la norme précédente, ie :

$$(2) \quad \delta_F(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|_{KF} = \inf \{ \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* : P(\|\xi - \eta\| > \varepsilon) < \varepsilon \}.$$

(ii) On montre que la norme (ou la distance) de FAN précédente est compatible avec la **convergence en probabilité** des **suites** de va au sens où :

$$(3) \quad \lim_n \|X_n\|_{KF} = 0 \Leftrightarrow P\text{-}\lim_n X_n = 0.$$

Alors, l'espace $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ est un **espace métrique** complet ssi $\mathcal{X}$ est un **espace complet**.

Si l'on note δ la **distance de Y.V. PROKHOROV** suivante :

$$(4) \quad \delta(\xi, \eta) = \inf \{ \varepsilon > 0 : P([\xi \in B]) \leq P([\eta \in B_\varepsilon]) + \varepsilon, \forall B \in \mathcal{B} \},$$

et si P^ξ et P^η sont resp les **lois marginales** (ou lois propres) de ξ et de η , on montre (V. STRASSEN) que :

$$(5) \quad \inf_{(\xi, \eta) \in \mathcal{G}_0} \|\xi - \eta\|_{KF} = \delta(\xi, \eta),$$

où $\mathcal{G}_0 = \{(\xi, \eta) \in (\mathcal{L}_{\mathcal{X}}^2(\Omega, \mathcal{F}, P))^2 : P^\xi = P_0^\xi, P^\eta = P_0^\eta\}$, où P_0^ξ et P_0^η sont des lp données.

(iii) La distance de FAN s'étend au cas où $\mathcal{X}$ est un **espace métrique** $(\mathcal{X}, d)$, en remplaçant dans (2) la norme $\|\cdot\|$ par d .