DISTANCE DE LÉVY (A4, C, G8)
(18 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** dont la **loi de probabilité** $P^{\xi} \in \mathscr{P}^{\xi}$ (**famille** de lois définies sur $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$) et soit $\mathscr{F}$ la famille des **fonctions de répartition** associée à $\mathscr{P}^{\xi}$.

On appelle **distance de P.P. LÉVY** (entre fr) la distance d_L définie sur $\mathscr{F}$ selon :

(1) $\quad d_L(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : F_2(x) \leq F_1(x + \varepsilon) + \varepsilon, \forall x \in \mathbf{R}\},$

pour tout couple $(F_1, F_2) \in \mathscr{F}^2$.

L'interprétation géométrique de la notion est basée sur les **graphes** :

(2)
$$\Gamma_1 = \{(x_1, p_{x(1)}) \in \mathbf{R} \times [0, 1] : p_{x(1)} = F_1(x_1)\},$$
$$\Gamma_2 = \{(x_2, p_{x(2)}) \in \mathbf{R} \times [0, 1] : p_{x(2)} = F_2(x_2)\},$$

associés à deux fr F_1 et F_2 (où x(i) désigne x_i , i = 1, 2), ainsi que sur le plan :

(3) $\quad \Delta_\alpha = \{(z, r_z) \in \mathbf{R}^2 : z + r_z = \alpha\},$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

Alors, l'ensemble :

(4) $\quad M_\alpha = (\Gamma_1 \cap \Delta_\alpha) \cup (\Gamma_2 \cap \Delta_\alpha)$

est une **partie bornée** de $\mathbf{R} \times [0, 1]$, donc possède un **diamètre** fini :

(5) $\quad \delta_\alpha = \mathrm{Diam}\, M_\alpha = \sup_{(t,u) \in M\alpha \times M\alpha} ||t - u|| < +\infty.$

où $M\alpha$ désigne M_α .

(ii) La **distance de LÉVY** entre les va ξ_1 et ξ_2 est alors définie selon :

(6) $\quad \delta_L(\xi_1, \xi_2) = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \delta_\alpha$.

Cette distance est « compatible » avec la **convergence en loi**, au sens où :

(7) $\quad \lim_n \delta_L(X_n, X_\infty) = 0 \Rightarrow X_n \rightarrow^{\mathscr{L}} X_\infty$,

où $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une **suite** de vars convergeant en loi vers la va X_∞ .

(iii) La notion se généralise aux **vecteurs aléatoires** $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$. On considère alors les graphes :

$$\text{(8)}\quad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x_1, p_{x(1)}) \in \mathbf{R}^K \times [0, 1] : p_{x(1)} = F_1(x_1)\}, \\ \Gamma_2 &= \{(x_2, p_{x(2)}) \in \mathbf{R}^K \times [0, 1] : p_{x(2)} = F_2(x_2)\}, \end{aligned}$$

(même convention) ainsi que l'hyperplan :

(9) $\Delta_\alpha = \{(z, r_z) \in \mathbf{R}^K \times \mathbf{R} : e_K' z + r_z = \alpha\}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

La norme $||.||$ de la formule (5) devient ici définie sur $\mathbf{R}^K \times \mathbf{R}$.