DISTANCE EN MOYENNE D'ORDRE p (A5, C1, E)
(14 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $L_{\mathbf{K}}^p$ (E, $\mathscr{A}$, μ) l'espace des (classes de) fonctions f : E $\mapsto$ **K** (avec **K** = **R** ou **C**) qui sont de puissance p-ième intégrable pr à une **mesure** μ.

On appelle **distance en moyenne d'ordre p** sur $L_{\mathbf{K}}^p$ (E, $\mathscr{A}$, μ) la distance d_p définie par la **norme** :

(1) $||f||_p^p = \int |f|^p \, d\mu, \quad \forall f \in L_{\mathbf{K}}^p (E, \mathscr{A}, \mu).$

Autrement dit :

(2) $d_p (f, g) = ||f - g||_p = (\int |f - g|^p \, d\mu)^{1/p}.$

La norme $||.||_p$ est aussi notée N_p : par suite, d_p (f, g) = N_p (f - g).

(ii) On dit que la suite f = $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $L_{\mathbf{K}}^p$ **converge en moyenne d'ordre p**, ou **converge selon la norme de $L_{\mathbf{K}}^p$**, vers une fonction $f_\infty \in L_{\mathbf{K}}^p$ ssi :

(3) $\lim_n ||f_n - f_\infty|| = 0,$

et l'on note $f_n \to^{Lp} f_\infty$ (en notant par commodité Lp pour L^p).

Lorsque p = +∞, la convergence pour la norme de $L_{\mathbf{K}}^\infty$ est aussi appelée **convergence uniforme presque partout** (pour μ).

(iii) Les notions précédentes se généralisent à des fonctions à valeurs vectorielles, en remplaçant, dans (1) et (2), la valeur absolue ou le module par une norme.

(iv) Enfin, ces mêmes notions s'appliquent aux **variables aléatoires**.