DOMAINE D'ATTRACTION (E, N)
(02 / 08 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **domaine d'attraction** est liée à la **loi des grands nombres** et au **théorème de la limite centrale**. Elle permet d'étudier notamment la loi limite (cf **loi asymptotique**) :

(a) d'un **processus** ;

(b) d'un mode de **convergence stochastique** pour une **suite** de **variables aléatoires**.

(i) Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un **processus vectoriel** réel iid selon la **lp** P^ξ d'un **vecteur aléatoire** $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ et Q^η la lp d'un vecteur aléatoire donné $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$. Ces lois sont donc définies sur $\mathscr{B}(\mathbf{R}^K)$. On pose :

(0) $\quad T_N = \Sigma_n X_n \qquad$ (total).

On dit que P^ξ appartient au **domaine d'attraction** de Q^η, ou que P^ξ est **attirée par** Q^η, ssi il existe une suite $a = (a_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ sur $\mathbf{R}^K$ et une suite $b = (b_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ tq le vecteur aléatoire (cf **centrage**, **variable centrée**, **variable réduite**, **variable normée**) :

(1) $\quad S_N = (T_N / b_N) - a_N \qquad$ (total dilaté puis centré)

converge en loi vers Q^η, ie (cf **convergence en loi**), ie :

(2) $\quad \mathscr{L}(S_N) \rightarrow_{N \rightarrow +\infty} Q^\eta$.

La **propriété d'attraction** est parfois notée $P^\xi \in Q^\eta$.

On suppose, en général, que Q^η n'est pas une **loi dégénérée**, ie que $Q^\eta \neq \delta_a$ (masse de DIRAC en un point $a \in \mathbf{R}^K$) (cf **loi de DIRAC**).

(ii) On considère une **famille** $\mathscr{P}^\xi$ de lois P^ξ et une famille $\mathscr{Q}^\eta$ de lois Q^η.

On dit que $\mathscr{P}^\xi$ appartient au **domaine d'attraction** de $\mathscr{Q}^\eta$, ou que $\mathscr{P}^\xi$ **est attirée par** $\mathscr{Q}^\xi$, ssi $P^\xi \in Q^\eta$, $\forall P^\xi \in \mathscr{P}^\xi$ et $\forall Q^\eta \in \mathscr{Q}^\eta$, ie ssi tout élément de P^ξ est attiré par un élément de Q^η.

On montre que, si $P^\xi \in Q^\eta$, alors, nécessairement :

$$
(3) \quad \begin{array}{l} \lim_N b_N = +\infty, \\ \lim_N (b_{N+1} / b_N) = 1. \end{array}
$$

Si P^{ξ} est une **loi stable**, alors P^{ξ} est attirée par elle-même.

(iii) Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on dit que P^{ξ} appartient au **domaine d'attraction partielle** de Q^{η} ssi il existe une suite $a = (a_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$, une suite $b = (b_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$, une fonction $\varphi : \mathbf{N}^* \mapsto \mathbf{N}^*$ et une suite $\varphi_N = \varphi (N)$ ($N \in \mathbf{N}^*$) tq :

(4) $\mathscr{L} (S_{\varphi (N)}{}^*) \to_{N \to +\infty} Q^{\eta}$.