DUAL, DUALITÉ (A3, A4)
(22 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

La notion de **dualité** entre espaces intervient dans deux contextes usuels.

(i) En algèbre, soit E un **espace vectoriel** sur un corps commutatif **K**.

On appelle **dual (algébrique)** de E, et l'on note E*, l'espace vectoriel Hom (E, **K**) des **formes linéaires** sur E, ie des applications linéaires de E dans **K** (cf **homomorphisme**). On le note aussi parfois $\mathscr{L}$(E, **K**).

Si f $\in$ Hom (E, **K**), on note souvent y = x* (x) au lieu de y = f (x).

On appelle **produit scalaire canonique** de E la forme bilinéaire <. , .> qui représente l'application de E x E* dans **K** définie par :

(1) (x, x*) $\mapsto$ < x, x* > = x* (x) (ie f (x)).

On montre que, si Dim E = n $<$ +∞, alors Dim E* = n. Si Dim E = +∞, alors Dim E* = +∞.

(ii) En topologie, soit E un **espace vectoriel topologique** sur un corps topologique **K** (eg E est un **espace de BANACH** ou un **espace de HILBERT**).

On appelle **dual topologique**, ou **dual fort**, de E, et l'on note E', l'espace $\mathscr{L}$(E, **K**) des formes linéaires continues sur E, ie des **applications linéaires** continues de E dans **K** (cf **application continue**). Le plus souvent, **K** = **R** (ou **K** = **C**).

On note parfois E* (au lieu de E') le dual topologique de E, et $\mathscr{LC}$ (E, **K**) au lieu de $\mathscr{L}$ (E, **K**) l'espace des formes linéaires continues.

En général, E' $\subset$ E* et E' $\triangleleft$ E* (ie E' est un sous-espace vectoriel de E*).

Si E est un espace de HILBERT, le **produit scalaire** canonique de E permet d'identifier E' et E*.