ÉCART ABSOLU MOYEN (C5, F3)
(04 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

L'**écart absolu moyen** est un indicateur de **dispersion** d'une va ou de sa loi. Il peut se comparer à l'**écart-type**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé** et $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de **loi** P^ξ.

On appelle **écart absolu moyen centré** en $\alpha \in P$ (théorique) de ξ ou de P^ξ le nombre réel, qui existe si $\xi \in L_{\mathbf{R}}^1 (\Omega, \mathcal{T}, P)$, défini par :

(1) $\delta_\alpha = E\,|\xi - \alpha| = \int |x - \alpha|\, dP^\xi (x)$.

Si $\alpha = E\,\xi$, on appelle simplement écart absolu moyen (théorique) le nombre $\delta = \delta_{E\xi}$.

(ii) Soit $X = (X_1 ,..., X_N) : \Omega \mapsto \mathbf{R}^N$ un N-**échantillon aléatoire** tq $X_n \sim P^\xi$, $\forall$ n = 1 ,..., N.

On appelle **écart absolu moyen centré en a** $\in$ **R** (empirique) de X (ou de ξ) la **va** :

(2) $d_N (a)$ ou $d_a (N) = N^{-1} \Sigma_{n=1}^N |X_n - a|$.

En pratique, a est une va ou une **statistique** calculée à partir de X. On appelle ainsi écart absolu moyen (empirique) la va :

(3) $d_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^N |X_n - \overline{X}_N|$,

où $\overline{X}_N = e_N' X / e_N' e_N$ (**moyenne empirique** de X).

(iii) On montre que δ_α est minimum lorsque $\alpha = Q_{1/2}\,\xi$ (**médiane** théorique de ξ). De même, $d_N (a)$ est minimum lorsque $a = m_N X$ (**médiane empirique** de X).

Si $N > 2$, on montre que :

(4)
$$\begin{cases} (2 / N)^{1/2} \leq d_N / S_N \leq (1 - N^{-2})^{1/2} & \text{si } N \in 2\,\mathbf{N} + 1, \\ (2 / N)^{1/2} \leq d_N / S_N \leq 1 & \text{si } N \in 2\,\mathbf{N}, \end{cases}$$

où $S^2_N = X' P X / N$ désigne la **variance empirique**.

(iv) Les notions précédentes interviennent dans diverses **situations statistiques** (cf **estimateur à distance minimale**, **estimateur quantilaire**, **méthode des moindres écarts absolus**, **méthodes à distance minimale**, **régression quantilaire**).