ÉCART QUADRATIQUE MOYEN (C5, F3)
(17 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion d'**écart quadratique moyen** intervient principalement en matière d'**estimation** (cf **théorie de l'estimation**) ou de **prévision**. Cette **caractéristique légale** constitue un indicateur de **dispersion** ou de **variabilité** qui possède un « pendant » empirique. Les définitions sont données dans un cadre non bayésien.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars** de loi P^{ξ} et $\alpha \in \mathbf{R}$.

On appelle **écart quadratique moyen**, ou **erreur quadratique moyenne**, (eqm) **(théorique)** de ξ pr à α le nombre réel (scalaire certain), qui existe si $\xi \in L_{\mathbf{R}}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P)$:

(1) $Q_{\alpha}\, \xi$ ou $Q(\xi, \alpha) = E(\xi - \alpha)^2 = E\, \xi^2 - 2\, \alpha \,.\, E\, \xi + \alpha^2$.

(ii) Soit ξ un **vecteur aléatoire** de carré intégrable, à valeurs dans $\mathbf{R}^K$, et $\alpha \in \mathbf{R}^K$.

On appelle :

(a) **écart quadratique moyen (théorique)** de ξ pr à α la **matrice** réelle (certaine) :

(2) $Q_{\alpha}\, \xi$ ou $Q(\xi, \alpha) = E(\xi - \alpha)(\xi - \alpha)' = E\, \xi\, \xi' - \alpha\, \xi - \xi\, \alpha' + \alpha\, \alpha' \in M_K^{++}(\mathbf{R})$ (**matrice définie positive**) ;

(b) **écart quadratique moyen généralisé (théorique)** le nombre réel (scalaire certain) :

(3) $Q_{\alpha}\, \xi$ ou $Q(\xi, \alpha) = E(\xi - \alpha)'(\xi - \alpha) = E\, ||\xi - \alpha||^2 = E\, ||\xi||^2 - 2\, \alpha'\, \xi + ||\alpha||^2$.

(ii) Soit $X = (X_1, ..., X_N)$ un **échantillon aléatoire**.

On définit l'**écart quadratique moyen (empirique)** de X (ou de ξ) pr à une **va** (ou pr à une **statistique**) $a_N(X)$ (qui peut donc dépendre de X) selon la statistique (donnée eg dans le cas scalaire) :

(1)' $q_{a,N}(X) = N^{-1} \,.\, \Sigma_n (X_n - a_N(X))^2$.

Cette statistique constitue un **estimateur** naturel de $Q_{\alpha}\, \xi$ (cf **statistique naturelle**). Elle peut donc se calculer à l'aide de (1) (ou (2), ou (3)) en y remplaçant formellement la loi P^{ξ} par la **loi empirique** P_N .

(iii) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P_\theta)_{\theta \in \Theta}$ un **modèle statistique** et $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$ son image par la va $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ (cf **modèle image**). Soit $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$ une fonction mesurable et $t : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}^Q$ une fonction mesurable définissant un estimateur T = t (X) du **paramètre** g (θ) (cf **application mesurable**).

On appelle **écart quadratique moyen**, ou **erreur quadratique moyenne**, de T la (Q,Q)-matrice :

(4) $\quad Q_\theta T$ ou $Q(T, \theta) = E_\theta (T - g(\theta))(T - g(\theta))'$.

On peut décomposer (4) en fonction de la **matrice de covariance** de T et du « carré » de son **biais** :

(5) $\quad Q_\theta T = V_\theta T + (B_\theta T)(B_\theta T)'$,

où $B_\theta T = E_\theta T - g(\theta)$ est le biais (vectoriel) de T pr à g (θ).

Si T est sans biais, l'eqm se confond avec la matrice de **dispersion** ($Q_\theta T = V_\theta T$).

(iv) On définit, comme précédemment, un **écart quadratique moyen**, ou **écart quadratique moyen généralisé** :

(6) $\quad Q_\theta T = E_\theta ||T - g(\theta)||^2 = \text{tr } E_\theta \{(T - g(\theta))(T - g(\theta)'\}$.

Cette formule de définition se décompose aussi selon :

(7) $\quad Q_\theta T = V_\theta ||T||^2 + ||B_\theta T||^2$.