ÉCART QUADRATIQUE MOYEN INTÉGRÉ (C5)
(04 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Notion notamment utilisée en **Statistique non paramétrique**, eg dans le cadre de l'**estimation** d'une **densité de probabilité** (cf eg **estimateur de la densité**, **estimateur spline de la densité**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'observation** et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** de **loi** P^{ξ}. On suppose que P^{ξ} est dominée par une **mesure positive** σ-finie μ définie sur $\mathcal{B}$ et l'on note $f = dP^{\xi} / d\mu$ sa **densité**.

On note $X = (X_1, ..., X_N)$ un **échantillon iid** comme ξ (**variable parente**) et $f_N^{\sim}$ un **estimateur** de f ($f_N^{\sim}$ dépend donc de X).

On appelle alors :

(a) **écart quadratique moyen de** $f_N^{\sim}$ **au point** $x \in \mathcal{X}$ le scalaire (cf **écart quadratique moyen**) :

(1) $(Q_f (f_N^{\sim}))(x)$ ou $Q_f f_N^{\sim} (x) = E_P (f_N^{\sim} (x) - f (x))^2$,

où E_P désigne l'**espérance** calculée avec P ;

(b) **écart quadratique intégré de** $f_N^{\sim}$ la va :

(2) $I_f (f_N^{\sim})$ ou $I_f f_N^{\sim} = \int (f_N^{\sim} (x) - f (x))^2 d\mu (x)$;

(c) **écart quadratique moyen intégré de** $f_N^{\sim}$ le scalaire :

(3) $Q_f (f_N^{\sim})$ ou $Q_f f_N^{\sim} = \int Q_f f_N^{\sim} (x) d\mu (x) = \int I_f \ f_N^{\sim} dP^{\xi}$.

Autrement dit :

(4) $Q_f f_N^{\sim} = \int E_P \{f_N^{\sim} (x) - f (x)\}^2 d\mu (x) = E_P \int \{f_N^{\sim} (x) - f (x)\}^2 d\mu (x)$.

(ii) Comme toute **caractéristique** de **dispersion**, l'écart quadratique moyen intégré (eqmi) mesure la « **distance** » moyenne (au sens de l'espérance) entre $f_N^{\sim}$ et f sur tout l'**espace d'observation** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mesuré par μ.

(iii) On dit qu'une suite $(f_n)_{N \in \mathbf{N}^*}$ d'estimateurs de f est :

(a) **convergente en moyenne quadratique** ssi (cf **convergence en moyenne quadratique**) :

(5) $\lim_N Q_f f_N^{\sim} (x) = 0$, μ-p.p., $\forall x \in \mathcal{X}$;

(b) **convergente en moyenne quadratique intégrée** ssi :

(6) $\lim_N Q_f f_N^{\sim} = 0.$