ÉCHANTILLONNAGE OPTIONNEL (F1, F4, M1, N)
(18 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **échantillonnage optionnel** est un mode de sélection d'un **échantillon** (eg **série temporelle**) à partir du **processus** qui le génère.

(i) Soit $\{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** tq $T \subset \mathbf{R}$ et $(\mathcal{T}_t)_{t \in T}$ une **famille croissante** de sous-**tribus** de $\mathcal{T}$ (ie $s < t \Rightarrow \mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}_t$). Soit alors $N = (N_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** de **va** entières $N_n : \Omega \mapsto \mathbf{N}^*$ tq :

(a) N est P-p.s. à valeurs dans l'ensemble :

(1) $\quad (\mathbf{N}^*_{\leq})^{\infty} = \{\nu = (\nu_n)_{n \in \mathbf{N}} : 1 \leq \nu_0 \leq ... \leq \nu_{n-1} \leq \nu_n \leq ...\}$;

(b) l'**événement aléatoire** $\{\omega \in \Omega : N_n (\omega) = m\}$ ne dépend que des événements antérieurs à l'instant m, ie :

(2) $\quad [N_n = m] = \{N_n (\omega) = m\} \in \mathcal{T}_m , \quad \forall\, m \in T \cap \mathbf{N}^*,$

où $\mathcal{T}_m$ s'interprète comme la tribu des évènements antérieurs à m.

On appelle **échantillonnage optionnel (au sens de J.L. DOOB)** une transformation $\mathcal{E} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ définie par $X = (X_t)_{t \in T} \mapsto Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et tq (cf **transformation des données**) :

(3) $\quad Y_n (\omega) = X_{N(n)(\omega)} (\omega), \qquad \forall\, \omega \in \Omega, \forall\, n \in \mathbf{N},$

où $N(n) (\omega)$ désigne $N_n (\omega)$.

(ii) Sous des hypothèses générales, on établit le **théorème de J.L. DOOB** : si X est une **martingale** (resp une **semi-martingale**), alors Y est aussi une martingale (resp une semi-martingale).