

ÉCHELLE ORDINALE (A10, C2, C3, K2)

(10 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Lors de l'observation d'un **phénomène**, diverses « grandeurs », ou **observations**, sont associées à chaque **unité statistique** concernée par ce phénomène. Ces grandeurs s'expriment souvent :

(a) soit selon une **échelle cardinale** : dans ce cas, elles peuvent faire l'objet de calculs algébriques directs ;

(b) soit selon une **échelle ordinale**, ou **échelle de rangement**, ou **échelle d'ordonnement**. Ce type d'échelle associe à l'unité statistique un élément d'un **ensemble** ordonné (donné) (cf **variable qualitative**, **variable ordinale**, **ordre**). Ce type de grandeurs ne peut faire l'objet de calculs algébriques directs, même s'il possède une apparence algébrique (eg numérique).

(ii) Soit Ω l'ensemble des unités statistiques observées.

On appelle **échelle ordinale** une variable ξ qui associe à toute unité statistique $\omega \in \Omega$ un élément $\xi(\omega) = x \in \mathcal{X}$ d'un **ensemble** ordonné (\mathcal{X}, \leq) (donné) (cf **relation d'ordre**). Si (\mathcal{Y}, \leq) est un autre ensemble ordonné et $\varphi : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ une **application** croissante, alors l'échelle ξ est unique à une transformation tq φ près.

(iii) Des observations classées selon une échelle ordinale ξ peuvent être analysées à l'aide de **caractéristiques** empiriques tq un **quantile** (eg **médiane**), une **statistique d'ordre**, une **statistique de rang**, ou encore des caractéristiques plus élaborées (**coefficient de corrélation des rangs**, etc).

L'**analyse des rangs** (cf eg classement, **problème de classement**, problème de comparaisons, etc) est souvent fondée sur de telles échelles.

Un exemple courant d'ensemble ordonné servant à construire des échelles ordinales est celui de la **droite réelle** ordonnée (\mathbf{R}, \leq) , ou d'une partie (eg un intervalle) $(\mathbf{R}, \leq_{\mathbf{R}})$ de cette droite (où $\leq_{\mathbf{R}}$ désigne la **restriction** de \leq à \mathbf{R}).

(iv) Parmi les échelles ordinales, on appelle **échelle d'intervalles**, ou **échelle d'écarts**, un couple constitué d'une échelle ordinale $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ et d'une fonction $i : \mathcal{X}^2 \mapsto \mathbf{R}$ tq, pour tout triplet $(x', x'', x''') \in \mathcal{X}^3$, le **rapport** :

$$(1) \quad [i(x''') - i(x'')] / [i(x'') - i(x')]$$

ne dépend pas de l'unité de mesure (cf **échelle de mesure**) ni de l'origine de l'échelle, ces deux données étant donc arbitraires.

Les opérations arithmétiques usuelles sont significatives seulement lorsqu'on les applique aux intervalles $|i(x') - i(x'')|$ eux-mêmes.

Lorsque (cas usuel) $\mathcal{X} = \mathbf{R}$, l'application i est une **application affine** (ie $i(x) = a + b x$, avec $(a, x) \in \mathcal{X}^2$ et $b > 0$) : ici, le rapport précédent vaut simplement $(x''' - x'') / (x'' - x')$.

Une telle échelle peut s'analyser en termes de **moments** (notamment **moyenne, variance**) ou de **coefficient de corrélation**.

Un exemple classique d'échelle d'intervalles est celui de la mesure d'une température. On peut exprimer cette échelle soit en degrés « centigrades » (ou degrés C° de A. CELSIUS), soit en degrés °F de D.G. FAHRENHEIT, selon la correspondance suivante :

échelle en degré centigrade	0	...	10	...	100
échelle en degré FAHRENHEIT	32	...	50	...	212

On a la relation suivante entre la première et la seconde :

$$(2) \quad (x''' - x'') / (x'' - x') = (100 - 10) / (10 - 0) = 9,$$

ainsi que la relation inverse :

$$(3) \quad [i(x''') - i(x'')] / [i(x'' - i(x'))] = (212 - 50) / (50 - 32) = 9.$$

(v) Enfin, parmi les échelles ordinales, on appelle **échelle de proportions**, ou **échelle de rapports**, une échelle d'intervalles dépendant d'une origine mais non pas de l'unité de mesure. Deux telles échelles diffèrent seulement par une constante multiplicative positive.

Des **observations** classées selon une échelle de proportions peuvent s'analyser à l'aide de **statistiques** tq une **moyenne géométrique** ou un **coefficient de variation**.

Un exemple d'échelle de rapports est celui (physique) de la mesure des « masses » (ou des « poids »). On peut exprimer cette échelle soit eg en « grammes » (resp « kilogrammes »), soit eg en « onces » (resp « livres »). Le rapport entre deux poids donnés est le même, qu'on le mesure sur l'une ou l'autre échelle :

$$(4) \quad 1 \text{ once (ou 1 Oz) } \# 28,35 \text{ grammes.}$$

